СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
ПРОФЕССОРА А. И. ПРИЛЕПКО

ДОПУЩЕНО
МИНИСТЕРСТВОМ ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ
ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1982

ББК 22.1
С23
УДК 510

П. Т. Дыбов, А. И. Забоев, А. С. Иванов,
Д. Ф. Калиниченко, Н. В. Шолохов

Рецензенты: кафедра спецкурсов высшей математики МЭИ (зав. кафедрой проф. С. А. Ломов), проф. Г. Н. Яковлев

С23 Сборник задач по математике для поступающих в вузы: Учеб. пособие / Дыбов П. Т., Забоев А. И., Иванов А. С. и др.; Под ред. А. И. Прилепко. — М.: Высш. школа, 1982. — 239 с., ил.

45 к.

Настоящий сборник предназначен для подготовки к вступительным экзаменам в вузы; может быть использован на подготовительных отделениях, подготовительных курсах и в физико-математических школах. Задачи систематизированы по темам и расположены в порядке возрастающей трудности. Большинство задач предлагалось на вступительных экзаменах в МИФИ и ряде других вузов. Типичные задачи снабжены решениями или указаниями.

Для подготовительных отделений вузов и для поступающих в вузы.

С $\frac{4306020400-417}{001(01)-82}$ 296-82

ББК 22.1
51

© Издательство «Высшая школа», 1982

ОГЛАВЛЕНИЕ

		Ответы, Условия указания, решения
Предисловие	3	
Список принятых обозначений	4	
Глава I. Рациональные уравнения, неравенства и функции одной переменной	6	123
§ 1. Линейные уравнения и неравенства с одной переменной. Линейная функция	6	123
§ 2. Квадратные уравнения и неравенства. Квадратичная функция	9	127
§ 3. Обратная пропорциональность	13	131
§ 4. Уравнения и неравенства высших степеней. Рациональная функция	16	135
§ 5. Линейные системы уравнений и неравенств	20	143
§ 6. Системы уравнений и неравенств с несколькими переменными высших степеней	23	146
Глава II. Трансцендентные функции, уравнения и неравенства		148
§ 1. Иррациональные уравнения и неравенства	26	148
§ 2. Системы иррациональных уравнений и неравенств	30	152
§ 3. Показательная и логарифмическая функции, показательные и логарифмические уравнения, системы уравнений и неравенства	31	153
§ 4. Преобразование тригонометрических выражений	41	161
§ 5. Тригонометрические функции	43	163
§ 6. Обратные тригонометрические функции	45	167
§ 7. Тригонометрические уравнения и системы уравнений	49	170
§ 8. Тригонометрические неравенства	57	183
Глава III. Задачи на составление уравнений и неравенств	59	185
§ 1. Задачи на движение	59	185
§ 2. Задачи на проценты, смеси, числа, работу	64	186
§ 3. Задачи на составление неравенств и систем неравенств. Задачи на экстремум	69	187
Глава IV. Первообразная и интеграл		189
§ 1. Первообразная. Формула Ньютона — Лейбница	72	189
§ 2. Вычисление площадей плоских фигур	75	190

		Ответы, условия указания, решения
Глава V. Прогрессии и числовые последовательности	78	193
§ 1. Прогрессии	78	193
§ 2. Числовые последовательности	83	196
Глава VI. Элементы векторной алгебры	86	198
§ 1. Линейные операции над векторами	86	198
§ 2. Скалярное произведение векторов	89	200
Глава VII. Планиметрия	92	203
§ 1. Задачи на доказательство	92	203
§ 2. Задачи на построение	92	206
§ 3. Задачи на вычисление	94	208
Глава VIII. Стереометрия	99	212
§ 1. Прямая, плоскость. Многогранники. Тела вращения	99	212
§ 2. Задачи на комбинации многогранников и тел вращения	105	216
§ 3. Объемы тел вращения	112	222
Глава IX. Разные задачи	113	223
§ 1. Задачи по алгебре	113	223
§ 2. Предел функции. Непрерывность	115	227
§ 3. Производная функции	117	230
§ 4. Интегральное исчисление. Смешанные задачи	119	232

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник задач предназначен для подготовки к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения. Он содержит более двух тысяч задач и примеров, тематика которых охватывает все разделы программ по математике для поступающих в вузы.

Основной целью сборника является оказание помощи поступающим в вузы в восстановлении и закреплении знаний по математике, в развитии навыков решения широкого круга задач.

Сборник задач состоит из 9 глав. Главы разбиты на параграфы, содержащие задачи, объединенные общей темой. По каждой теме задачи расположены в порядке возрастания их трудности, что позволит учащимся постепенно приобретать необходимые навыки и опыт решения задач. Тем самым задачи по возможности классифицированы. Большинство задач, включенных в сборник, предлагалось в последние годы на вступительных экзаменах в МИФИ и ряде других вузов страны. Ко всем задачам приведены ответы; часть задач снабжена решениями или указаниями. В данном издании вместо слов «Решение» и «Указание» употребляются знаки ▲ и ● соответственно. Для удобства пользования книгой приведен список обозначений.

При составлении сборника учтен многолетний опыт работы со слушателями подготовительных отделений, физико-математической школы и экзаменационной комиссии по математике в МИФИ. Настоящий сборник не дублирует вышедших изданий, он полностью соответствует новой школьной программе и может быть использован в качестве учебного пособия на подготовительных отделениях, подготовительных курсах и в физико-математических школах.

Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры высшей математики МИФИ за большую помощь при подготовке рукописи к печати и замечания, способствовавшие улучшению данной книги.

Авторы

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

N — множество всех натуральных чисел

Z_0 — множество всех неотрицательных целых чисел

Z — множество всех целых чисел

Q — множество всех рациональных чисел

R — множество всех действительных чисел

$[a;\ b]$ — замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b, $a < b$

$]a;\ b[$ — открытый промежуток (интервал) с началом a и концом b, $a < b$

$]a;\ b]$, $[a;\ b[$ — полуоткрытые промежутки с началом a и концом b, $a < b$, $]a;\ \infty[$, $[a;\ \infty[$, $]-\infty;\ b]$, $]-\infty;\ b[$ — бесконечные промежутки, лучи числовой прямой

$]-\infty;\ \infty[$ — бесконечный промежуток, числовая прямая

$\Rightarrow$ — знак следования

$\Leftrightarrow$ — знак равносильности

$\in$ — знак принадлежности

$n \in N$ — число n принадлежит множеству натуральных чисел

$\subset$ — знак включения

$C \subset D$ — множество C включено в множество D, или C есть подмножество множества D

$\cup$ — знак объединения

$C \cup D$ — объединение множеств C и D

$]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$ — ε-окрестность точки a

$\{a;\ b;\ \ldots\}$ — множество, состоящее из элементов a, b, ...

$(a;\ b)$ — упорядоченная пара

$(a;\ b;\ c)$ — упорядоченная тройка

$n!$ — n-факториал — произведение первых n натуральных чисел ($1! = 1$).

$[x]$ — целая часть числа x

$\{x\}$ — дробная часть числа x

$|x|$ — модуль (абсолютная величина) числа x

(x_n), (a_n) — бесконечная числовая последовательность

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ — число a является пределом последовательности (x_n)

$f(x)$ — значение функции f в точке x

$D(f)$ — область определения функции f

$E(f)$ — множество значений функции f

Δx — приращение переменной x

$\Delta f(x_0)$, Δf — приращение функции f в точке x_0

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ — число b является пределом функции f при x, стремящемся к a

$f'(x_0)$ — производная функции f в точке x_0

lg — десятичный логарифм

ln — натуральный логарифм (логарифм с основанием e)

$\max\limits_{[a;\,b]} f$ — наибольшее значение функции f на отрезке $[a;\ b]$

$\min\limits_{[a;\,b]} f$ — наименьшее значение функции f на отрезке $[a;\ b]$

$\int f(x)\,dx$ — общий вид первообразных для функции $f(x)$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — интеграл функции f в пределах от a до b

$A \in \Phi$ — точка A принадлежит фигуре Φ

$A \notin \Phi$ — точка A не принадлежит фигуре Φ

$\Phi_1 \cap \Phi_2$ — пересечение фигур Φ_1 и Φ_2

$\varnothing$ — пустое множество

$\Phi_1 \cong \Phi_2$ — фигуры Φ_1 и Φ_2 конгруэнтны (равны)

$\Phi_1 \sim \Phi_2$ — фигуры Φ_1 и Φ_2 подобны

$\uparrow\uparrow$ ($\uparrow\downarrow$) — одинаково (противоположно) направленные

$\parallel$ — параллельны

$\perp$ — перпендикулярны

$\angle$ — угол, двугранный угол, трехгранный угол

$\angle$ — величина угла

$(\widehat{a,\ b})$ — величина угла между прямыми

$(\widehat{a,\ \alpha})$ — величина угла между прямой и плоскостью

$(\widehat{\alpha,\ \beta})$ — величина угла между плоскостями

(AB) — прямая AB

$[AB]$ — отрезок AB

$[AB)$ — луч AB

$|AB|$ — длина отрезка AB

$\vec{a}$, $\vec{AB}$ — вектор

$\vec{0}$, $\vec{AA}$ — нулевой вектор

$(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})$ — величина угла между векторами

$|\vec{a}| = a$, $|\vec{AB}| = AB$ — длина вектора

$(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ — прямоугольный базис

$\vec{a} = (x;\ y;\ z)$ — вектор с координатами x, y, z

$\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ — скалярное произведение векторов

ГЛАВА I

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Решите уравнения:

1. $(3x+7)-(2x+5)=3$.

2. $\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{20}+\frac{x}{30}+\frac{x}{42}=-6$.

3. а) $3x+1=(4x-3)-(x-4)$;
   б) $3x+1=(4x-3)-(x-5)$.

4. $ax=a^2$. 5. $(a-2)x=a^2-4$.

6. $(a^2-9)x=a^3+27$.

Решите неравенства:

7. а) $7x>3$; б) $-4x>5$; в) $5x+6\leqslant 3x-8$;
   г) $x/2+1\leqslant x/\sqrt{3}+1/2$.

8. а) $ax\leqslant 1$; б) $ax>1$.

Решите системы неравенств:

9. а) $\begin{cases} 3x>1, \\ -x<3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x<\pi, \\ -x>-1{,}6; \end{cases}$

   в) $\begin{cases} x>-1, \\ 2x+1\leqslant 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+2\geqslant 0, \\ x+\sqrt{5}<0. \end{cases}$

10. Найдите все значения $x\in N$, удовлетворяющие неравенству $5x-7<2x+8$.

Решите уравнения:

11. а) $|x-1|=3$; б) $|x+2|=-1$.

12. а) $|3-x|=a$; б) $|x-a|=2$.

13. а) $|x-3|=x-3$; б) $|x-3|=3-x$;
в) $|x-3|=x$.

14. $|2x-1|=|x+3|$. 15. $|x-a|=|x-4|$.

16. а) $|x-4|+|x+4|=9$; б) $|x-4|+|x+4|=8$;
в) $|x-4|-|x+4|=8$; г) $|x+4|-|x-4|=8$.

17. $|x-3|+|x+2|-|x-4|=3$.

18. При каких значениях a уравнение $|2x+3|+|2x-3|=ax+6$ имеет более двух корней?

Решите неравенства:

19. а) $|x|>a$; б) $|x-1|>-1$; в) $|x-1|>1$.

20. а) $|x|<a$; б) $|x+2|\leqslant -2$; в) $|x+2|<2$.

21. а) $|2x+1|>x$; б) $|2x+3|\leqslant 4x$.

22. $|1-3x|-|x+2|\leqslant 2$. 23. $|x+2|+|x-3|>5$.

Решите системы неравенств:

24. $\begin{cases} |x|\geqslant x, \\ 2x-1>3. \end{cases}$ 25. $\begin{cases} |x|\leqslant -x, \\ |x+2|>1. \end{cases}$

26. При каком значении a функция $f(x)=(a-2)x+3a-4$, $x\in\,]-\infty;\ +\infty[$ является а) четной; б) нечетной?

27. При каком значении a функция $f(x)=(a+3)x+5a$, $x\in\,]-\infty;\ \infty[$ является периодической?

28. Найдите значения k, при которых функция $f(x)=(k-1)x+k^2-3$, $x\in\,]-\infty;\ \infty[$ а) монотонно возрастает; б) монотонно убывает.

29. Определите значения m, при которых функция $y=(m^2-4)x+|m|$, $x\in\,]-\infty;\ \infty[$ имеет обратную функцию. Найдите эту функцию.

30. Дана линейная функция $f(x)$. Докажите, что функция $F(x)=f(f(x))$ также является линейной.

Постройте графики функций:

31. а) $y=2x$; б) $y=-\frac{1}{3}x$.

32. а) $y=x-2$; б) $y=3-x$.

33. а) $y=2x-1$; б) $y=1-3x$.

34. а) $y=|x-1|$; б) $y=-|x+2|$.

35. а) $y=|1+2x|$; б) $y=-|-4x+2|$.

36. $y=||x-1|-2|$. 37. $y=|x+2|+|x-3|$.

38. $y=|2x+1|-|2x-2|$. 39. $y=x+x/|x|$.

40. $y=x+|x-1|+\frac{|x-2|}{x-2}$.

Постройте графики уравнений:

41. $\frac{y}{x+1}=-1$. 42. $|y|+x=-1$.

43. $|x|+|y|=2$. 44. $|y-3|=|x-1|$.

На плоскости xOy укажите точки, удовлетворяющие неравенствам:

45. $y>x$. 46. $y<-x$.

47. $y\geqslant|x|$. 48. $x>|y|$.

На плоскости xOy укажите точки, удовлетворяющие уравнениям:

49. $y+|y|-x-|x|=0$. 50. $|x+y|+|x-y|=4$.

51. $|y\ x=x$. 52. $|x-y|+y=0$.

53. Найдите значение a, при котором функция y непрерывна в точке $x=0$, если

$$y=\begin{cases} 2x+1 & \text{при } x\leqslant 0, \\ -x+a & \text{при } x>0. \end{cases}$$

54. Найдите критические точки функции а) $y=|3x+1|$; б) $y=|x+1|+x+1$; в) $y=|x+1|+|x-1|$; г) $y=|x-3|-|x+3|$.

Найдите интервалы монотонного возрастания и убывания фушкций:

55. а) $y=3-x$; б) $y=\frac{1}{4}x+1$.

56. а) $y=2+|x-4|$; б) $y=3-|x|$.

57. а) $y=-(|x+10|+|x-10|)$; б) $y=|x-4|-|x+5|$; в) $y=|x+4|-|x+3|+|x+2|-|x+1|+|x|$.

Найдите точки экстремума функций:

58. а) $y=|2x-1|$; б) $y=2-|3-4x|$.

59. а) $y=|3x+2|+|2x-3|$; б) $y=|x+7|-2|x-2|$.

60. $y=2|x-1|-3|x+2|+x$.

61. $y=|x-2|+|x-a|$.

62. Найдите значения a, при которых функция y имеет максимум в точке $x=2$, если

$$y=\begin{cases} x+1 & \text{при } x<2, \\ a & \text{при } x=2, \\ 5-x & \text{при } x>2. \end{cases}$$

63. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=|x-a|$ на отрезке $[1;\ 2]$ $(a\neq 1;\ a\neq 2)$.

§ 2. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Решите уравнения и неравенства:

1. а) $x^2-7x+12=0$; б) $-x^2+4x+5=0$;
   в) $6x^2-5x+1=0$; г) $3x^2+10x+3=0$;
   д) $x^2-2x-5=0$; е) $2x^2+x-8=0$.
2. а) $x^2-3x-4>0$; б) $x^2-3x-4\leqslant 0$;
   в) $x^2+4x+4>0$; г) $4x^2+4x+1\leqslant 0$;
   д) $2x^2-x+5>0$; е) $x^2-x+1<0$.
3. Найдите решение системы

а) $\begin{cases} 2x^2-5x+2=0, \\ x-2<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-2x-3=0, \\ x+4\geqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-9\geqslant 0, \\ x-4<0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-6x+5\geqslant 0, \\ x^2-25\leqslant 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2+6x+9\leqslant 0, \\ 2x-5>0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2+x+8<0, \\ x^2+6x+5=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} |x-2|+|x-3|=1, \\ 813x-974\leqslant 163x^2. \end{cases}$

4. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+x-7=0$. Не решая уравнения, найдите а) $x_1^2+x_2^2$; б) $x_1^4+x_2^4$; в) $x_1^5+x_2^5$.

5. Дано уравнение $ax^2+bx+c=0$. Докажите, что если x_1, x_2, x_3 — попарно различные действительные корни этого уравнения, то $a=b=c=0$.

6. При каких значениях a уравнение

$$(a^2-3a+2)x^2-(a^2-5a+4)x+a-a^2=0$$

имеет более двух корней?

7. Уравнение $x^2+px+q=0$, где $p\in Z$, $q\in Z$, имеет рациональные корни. Докажите, что эти корни — целые числа.

8. Докажите, что уравнение $x^2+(2m+1)x+2n++1=0$ не имеет рациональных корней, если $m\in Z$, $n\in Z$.

9. При каких значениях a уравнение $2x^2-$ $-(a^3+8a-1)x+a^2-4a=0$ имеет корни разных знаков?

10. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2-ax+1=0$ не имеет действительных корней.

11. При каких значениях k имеет хотя бы один положительный корень уравнение $x^2+2(k-1)x+k+5=0$?

12. Найдите все значения m, при которых оба корня уравнения $2x^2+mx+m^2-5=0$ а) меньше 1; б) больше -1.

13. Найдите все значения k, при которых один корень уравнения $x^2-(k+1)x+k^2+k-8=0$ больше 2, а другой корень меньше 2.

14. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+2(k-3)x+9=0$ $(x_1\neq x_2)$. При каких значениях k $-6<x_1<1$ и $-6<x_2<1$?

15. Найдите все значения k, при которых один корень уравнения $(k-5)x^2-2kx+k-4=0$ меньше 1, а другой корень больше 2.

16. При каких значениях m неравенство $mx^2-9mx+5m+1>0$ выполняется при любом $x\in R$?

17. Найдите все значения m, при которых всякое решение неравенства $1\leqslant x\leqslant 2$ является решением неравенства $x^2-mx+1<0$.

Решите уравнения:

18. а) $x^2-|x-2|=0$; б) $x^2+5|x|+4=0$.

19. а) $2x^2-|3x-2|=0$; б) $x^2-|x-1|=0$.

20. а) $|x^2+x-6|=x^2+x-6$; б) $|6x^2-5x+1|=-5x-6x^2-1$; в) $|x^2+x|=x^2+x$; г) $|x^2-x+5|=x-x^2-5$.

21. а) $|x^2-1|=x+3$; б) $|x^2-1|=|x+3|$.

22. а) $|2x^2-1|=x^2-2x-3$;

б) $|2x^2-1|=|x^2-2x-3|$.

23. $x^2-3|x+2|=x^2-2x$.

Решите неравенства:

24. а) $x^2-|x-12|<0$; б) $x^2+2|x|-15\geqslant 0$;

в) $x^2-7|x|+10\leqslant 0$; г) $8x^2+|-x^2+1>0$;

д) $4x^2+2|x|+0{,}25<0$.

25. а) $3x^2-|10x-3|>0$; б) $x^2\leqslant|x-2|$.

26. а) $x^2+x-20\leqslant x^2+x-20$; б) $|x-2x^2|>2x^2-x$; в) $x^2+6x+8\leqslant -x^2-6x-8$.

27. а) $|x^2-6|>4x+1$; б) $|x-3|>|x^2-3|$.

28. а) $|2x^2-x-10|>x^2-8x-22|$;

б) $|x^2-5|x|+4|\leqslant|2x^2-3|x|+1|$.

29. Найдите область определения функции а) $y = \sqrt{-x^2}$; б) $y = x - \sqrt{1-x^2}$; в) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$; г) $y = 1/\sqrt{x^2+4x}$; д) $y = \sqrt{16-x^2} + \sqrt{x^2+x}$; е) $y = \sqrt{x^2-|x|} + 1/\sqrt{9-x^2}$.

30. Докажите, что функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, не является периодической.

31. При каких значениях a функция $f(x) = -x^2 + (a-1)x + 2$ монотонно возрастает на интервале $]1; 2[$?

32. Найдите функцию, обратную функции $f(x) = x^2 - 6x + 1$, а) на интервале $]-\infty; 3[$; б) на интервале $]5; 7[$.

Постройте графики функций:

33. а) $y = x^2$; б) $y = (x-2)^2$;
в) $y = 2(x-2)^2$; г) $y = 2(x-2)^2 - 1$.

34. а) $y = -x^2$; б) $y = -(x+1)^2$;
в) $y = -0{,}5(x+1)^2$; г) $y = 2 - 0{,}5(x+1)^2$.

35. а) $y = x^2 + 5x + 6$; б) $y = 4x^2 + 4x + 1$;
в) $y = x^2 + x + 1$.

36. а) $y = 3x - x^2 - 2$; б) $y = 2x - x^2 - 1$;
в) $y = x - x^2 - 1$.

37. а) $y = x^2 - 4|x| + 3$; б) $y = x^2 + 4|x| + 3$;
в) $y = 2 - |x| - x^2$.

38. а) $y = |x^2 + x|$; б) $y = -|x^2 - 2x|$.

39. а) $y = |x^2 - 3|x| + 2|$; б) $y = -|x^2 - |x| - 6|$.

40. а) $y = |x|(x-2)$; б) $y = (3-x)|x+1|$.

41. $y = |x^2 - 4| - |x^2 - 9|$.

42. Найдите производную функции а) $y = x^2 - 6x + 15$; б) $y = -x^2 - x + \sqrt{5}$; в) $y = 3x^2 + x + \sin 1$; г) $y = -4x^2 - (\operatorname{tg} 2)x + \pi$; д) $y = \frac{1}{2}x^2 - x\sqrt{3} + 2^{\sqrt{2}}$; е) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \pi x + \operatorname{arctg} 4$; ж) $y = (5x+1)^2$; з) $y = -(0{,}5x - 4)^2$; и) $y = ax^2 + |a|$; к) $y = (a-1)x^2 - ax$.

43. В указанной точке x_0 найдите значение производной функции а) $y = x^2 - 5x + 6$, $x_0 = 1$; б) $y = -x^2 + 3x$, $x_0 = -2$; в) $y = \frac{1}{2}x^2 - x$, $x_0 = 1$; г) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$, $x_0 = 0$.

44. В указанной точке x_0 определите угол между осью абсцисс и касательной к кривой а) $y = 2x^2 + x$, $x_0 = 2$; б) $y = -x^2 + 2x$, $x_0 = 3$; в) $y = \frac{x^2}{2} + x\sqrt{3}$, $x_0 = 0$; г) $y = 2x - x^2$, $x_0 = 1{,}5$; д) $y = 3x + 4x^2$, $x_0 = -2$.

45. В указанной точке $M(x_0; y_0)$ составьте уравнение касательной к параболе а) $y = 3x^2 - 6x + 1$, $M(0; 1)$; б) $y = -x^2/2 - 4x + 3$, $M(-1; 6{,}5)$; в) $y = x^2 + 4x + 8$, $M(-2; 4)$.

46. При каком значении a касательная к параболе $y = ax^2 + x - 3$ в точке $M(1; a - 2)$ параллельна прямой $y = 2x - 1$?

47. На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = a$, $x_2 = 3a$, $a \neq 0$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей?

48. Составьте уравнение касательной к параболе $y = -2x^2 + 16x - 31$, параллельной оси абсцисс.

49. Составьте уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 + 8x$, перпендикулярной оси ординат.

50. При каких значениях k касательная к параболе $y = 4x - x^2$ в точке $M(1; 3)$ а) является касательной к параболе $y = x^2 - 6x + k$; б) пересекает параболу $y = x^2 - 6x + k$ в двух точках?

Найдите критические точки функций:

51. а) $y = x^2 - 6x + 1$; б) $y = -x^2 + 4x - 3$;

в) $y = \frac{1}{2}x^2 + 5x$; г) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2{,}5x - \frac{1}{3}$.

52. а) $y = x^2 - |x|$; б) $y = -2x^2 + |x| + 3$.

53. а) $y = |x^2 - 6x + 5|$; б) $y = -|4x + x^2|$;

в) $y = |x^2 + 2x + 6|$.

54. а) $y = |x^2 - 4| + |x + 3|$; б) $y = |x^2 - 1| + |x^2 - 3|$.

55. а) $y = x|2 - x|$; б) $y = (x - 5)|x - 1|$;

в) $y = -(x - 2)|x - 2|$.

56. Определите интервалы монотонного убывания функции а) $y = x^2 - 3x + 1$; б) $y = -x^2 - 4x + 8$; в) $y = 0{,}5x^2 - |x|$; г) $y = |0{,}5x^2 - |x|$.

57. Определите интервалы монотонного возрастания функции а) $y = \frac{1}{3}x^2 + |x - 1| - 2$; б) $y = -2x^2 + 8x - 3$; в) $y = |x - 4| - x^2$; г) $y = |\,|x - 4| - x^2|$.

Определите точки экстремума функций:

58. а) $y=x^2$; б) $y=-x^2$; в) $y=(x-1)^2$;
г) $y=-(2+x)^2$; д) $y=x^2+2x+100$;
е) $y=-4x^2+x-5$.

59. а) $y=x|x|$; б) $y=|2x+3|^2$; в) $y=(x-2)|x+1|$.

60. а) $y=x^2-3|x|+2$; б) $y=x^2+3|x|+2$;
в) $y=x^2-|x-1|+3$.

61. а) $y=|x^2-6|x|+8|$; б) $y=|x^2-|x-2|-14|$.

62. а) $y=|x^2-1|-|x^2-4|$;
б) $y=|x^2-4|+|x^2-25|$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения функций в указанных промежутках:

63. а) $y=3x^2-x+5$ на отрезке $[1; 2]$;
б) $y=-4x^2+5x-8$ на отрезке $[2; 3]$;
в) $y=x^2-2x+5$ на отрезке $[-1; 2]$;
г) $y=-x^2+6x-1$ на отрезке $[0; 4]$.

64. а) $y=x^2+|x+2|$ на отрезке $[-3; -1]$;
б) $y=(x-3)|2-x|$ на отрезке $[1; 4]$;
в) $y=|x^2-4|x||$ на отрезке $[-1; 3]$.

65. Пусть x_1 и x_2 $(x_1\neq x_2)$ — нули функции $f(x)=-ax^2+bx+c$. Докажите, что существует такая точка $x_0\in]x_1; x_2[$, в которой производная функции $f(x)$ равна нулю.

66. Функция $f(x)=ax^2+bx+c$ задана на отрезке $[x_1; x_2]$, причем $f(x_1)=f(x_2)=A$, $x_1\neq x_2$. Докажите, что найдется такая точка $x_0\in]x_1; x_2[$, в которой производная функции $f(x)$ равна нулю.

67. Функция $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, задана на отрезке $[x_1; x_2]$. Докажите существование точки $x_0\in]x_1; x_2[$ такой, что $f(x_2)-f(x_1)=f'(x_0)(x_2-x_1)$. Определите абсциссу точки x_0.

§ 3. ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

Решите уравнения:

1. а) $\frac{1}{x}=5$; б) $\frac{2}{x-1}=0$; в) $\frac{4}{x+2}=a$; г) $\frac{1}{|2-x|}=a$.

2. а) $\frac{3}{x-1}=\frac{2}{x}$; б) $\frac{2}{x-1}+x=\frac{x+1}{x-1}$;
в) $\frac{x^2+3}{x+3}=2$; г) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{(x-a)(x-1)}$.

Решите неравенства:

3. а) $\frac{1}{x} > 1$; б) $\frac{1}{x} \leqslant 1$; в) $\frac{1}{x-2} > -1$;

г) $\frac{1}{x+3} \leqslant -2$; д) $\frac{a}{x-1} > 1$; е) $\frac{a}{x+1} \geqslant -1$.

4. а) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} > 0$; б) $\frac{1}{2x-3} \leqslant \frac{1}{2x+5}$.

5. а) $\frac{x^2-5x+4}{x-4} \geqslant 0$; б) $\frac{x+3}{3x^2+10x+3} < 0$.

6. а) $\frac{2}{|x+2|} \leqslant 1$; б) $\frac{2}{|x-2|} > \left|\frac{-3}{2x-1}\right|$;

в) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9} + \frac{|x-2|}{x-3} - 12 < 0$;

г) $x - 2\left(1 - \frac{1}{a}\right) < \frac{2(x+1)}{3a}$.

Постройте графики функций:

7. а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{1}{x}$; в) $y = \frac{1}{2+x}$; г) $y = \frac{1}{1-x}$.

8. а) $y = \frac{1}{|x-3|}$; б) $y = -\frac{1}{|2x+1|}$.

9. а) $y = 2 + \frac{1}{x}$; б) $y = 1 - \frac{2}{x}$;

в) $y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}$; г) $y = -3 - \frac{1}{x-2}$.

10. а) $y = \frac{x+1}{x-1}$; б) $y = \frac{x-1}{x+1}$;

в) $y = \frac{2x-2}{x+3}$; г) $y = \frac{x+2}{3-x}$.

11. а) $y = \frac{1}{2-x}$; б) $y = \frac{2}{|x-1|-1}$.

12. а) $y = \frac{x-4}{|x+2|}$; б) $y = \frac{1-x}{|x+3|}$.

13. а) $y = \frac{x-1}{|x-1|}$; б) $y = \frac{|x-2|}{|x+3|-1}$.

14. а) $y = \frac{x-1}{|x-1|} + \frac{|x+1|}{x+1} - \frac{1}{x}$;

б) $y = -\left|\frac{x^2-9}{x+3} - x + \frac{2}{x-1}\right|$.

15. Найдите производную функции а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = -\frac{2}{x}$; в) $y = \frac{1}{2(x+1)}$; г) $y = \frac{1}{1-x}$; д) $y = 1 - \frac{1}{x+2}$; е) $y = -3 + \frac{1}{2x-1}$; ж) $y = \frac{2x-3}{x+1}$; з) $y = \frac{x-4}{1-3x}$.

16. В указанной точке найдите значение производной функции

а) $y=\frac{3}{x}$, $x_0=1$; б) $y=\frac{1}{x}$, $x_0=-2$;

в) $y=\frac{2x-1}{x-1}$, $x_0=0$; г) $y=\frac{|x-3|}{x+1}$, $x_0=1$.

17. В указанной точке x_0 определите угол между осью Ox и касательной к кривой

а) $y=\frac{1}{1-x}$, $x_0=2$; б) $y=\frac{x-2}{x+3}$, $x_0=0$;

в) $y=\frac{1-2x}{|x|}$, $x_0=3$; г) $y=\frac{|x-1|}{x+3}$, $x_0=-2$;

д) $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}$, $x_0=2$; е) $y=\frac{2-3x}{2x+1}+\frac{1}{|x|}$, $x_0=-1$.

18. В указанной точке $P(x_0;\ y_0)$ составьте уравнение касательной к кривой а) $y=-\frac{3}{x}$, $P(3;\ -1)$; б) $y=\frac{1}{x-2}$, $P(1;\ -1)$; в) $y=\frac{x-3}{x+2}$, $P\left(0;\ -\frac{3}{2}\right)$; г) $y=\frac{|x-2|}{2x+1}-\frac{1}{|x-3|}$, $P\left(1;\ -\frac{1}{6}\right)$.

19. На гиперболе $y=\frac{x-1}{x+1}$ найдите точку M, в которой касательная к этой гиперболе а) параллельна прямой $y=2x+1$; б) перпендикулярна прямой $y=-\frac{1}{8}x-3$.

20. Покажите, что касательные, проведенные к гиперболе $y=\frac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат, параллельны между собой.

21. Составьте уравнение касательной к гиперболе $y=\frac{x-9}{x+5}$, проходящей через начало координат.

22. Докажите, что функция $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ строго монотонна на любом интервале $]x_1,\ x_2[$ при условии $ad\neq bc$, $c\neq 0$, $x=-\frac{d}{c}\notin\ ]x_1;\ x_2[$.

23. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

а) $y=(x-3)/(x+1)$ на отрезке $[0;\ 2]$;

б) $y=(2x+1)/(x-2)$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

24. Функция $y=k/x$, $k>0$, задана на отрезке $[x_1; x_2]$. Докажите существование точки $x_0 \in]x_1; x_2[$ такой, что $y(x_2)-y(x_1)=y'(x_0)(x_2-x_1)$. Найдите координаты точки x_0.

§ 4. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ. РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

1. Решите уравнение а) $(x-1)(x^2+4x+3)=0$; б) $(2x+3)(x^2-x+1)=0$; в) $x^3+27=0$; г) $8x^3-1=0$; д) $x^3-1+x^2-1=0$; е) $x^3+8+x^2-4=0$; ж) $x^3+1+x+1=0$; з) $x^3-8+x-2=0$; и) $x^3+x^2+x+1=0$; к) $x^3-x^2+x-1=0$.

2. Уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$, где a, b, c — целые числа, имеет рациональный корень x_1. Докажите, что x_1 — целое число и что c делится на x_1 нацело.

3. Найдите рациональные корни уравнения а) $x^3+2x^2-x-2=0$; б) $x^3-x^2-8x+12=0$; в) $x^3-9x^2+27x-27=0$; г) $x^3+x^2+x-3=0$; д) $6x^3+7x^2-1=0$; е) $2x^3+x^2+5x-3=0$.

4. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$. Докажите, что $x_1+x_2+x_3=-b/a$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=c/a$, $x_1x_2x_3=-d/a$.

5. Дано уравнение $x^3+px+q=0$. Найдите сумму квадратов его корней.

6. Решите уравнение $x^3+3x-3=0$.

7. Решите уравнение а) $(x-1)(x+3)(x^2-x-6)=0$; б) $(x^2-3x+2)(x^2+7x+10)=0$; в) $(x^2-x-3)(x^2-2x+2)=0$; г) $(x^2-x+1)(x^2-2x+3)=0$; д) $x^4-16-5x(x^2-4)=0$; е) $x^4+11x^2+10+7x(x^2+1)=0$.

8. Уравнение $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, где a, b, c, d — целые числа, имеет рациональный корень x_1. Докажите, что x_1 — целое число и что d делится нацело на x_1.

9. Найдите рациональные корни уравнения а) $x^4+2x^3-16x^2-2x+15=0$; б) $x^4-7x^3+5x^2+4x+12=0$; в) $x^4+x^3-5x-5=0$; г) $x^4+x^3-1=0$; д) $6x^4-x^3+5x^2-x-1=0$.

Решите уравнения:

10. а) $2x^4-5x^2+2=0$; б) $x^4-2x^2-3=0$.

11. а) $(x-1)^4+(x+1)^4=16$;

б) $(2x-3)^4+(2x-5)^4=2$.

12. а) $(x^2+2x)^2-7(x^2+2x)+6=0$;

б) $\frac{1}{2x^2-x+1}+\frac{3}{2x^2-x+3}=\frac{10}{2x^2-x+7}$.

13. а) $(x-a)x(x+a)(x+2a)=3a^4$;

б) $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$.

14. а) $x^2+4/x^2-8(x-2/x)-4=0$;

б) $4x^4+6x^3-10x^2-9x+9=0$;

в) $\frac{(x+1)^5}{x^5+1}=\frac{81}{11}$; г) $(x^2-6x-9)^2=x^3-4x^2-9x$.

15. а) $x^2+\frac{25x^2}{(x-5)^2}=11$; б) $(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0$.

16. а) $x^4+4x-1=0$; б) $x^4-4x^3-1=0$;

в) $x^4-2x^2-400x=9999$.

17. а) $(x^3-2x)-(x^2+2)a-2a^2x=0$;

б) $(x^2-a)^2-6x^2+4x+2a=0$.

18. $x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0$, если известно, что левая часть уравнения разлагается на множители с целыми коэффициентами.

Решите неравенства:

19. а) $(x+2)(x-1)(x-3)>0$;

б) $(x+2)x(x-1)(x-2)<0$;

в) $(x+4)^5(x+3)^6(x+2)^7(x-1)^8\leqslant 0$;

г) $(x+3)^n(x-2)<0$, $n\in N$.

20. а) $x^3-3x^2-10x+24>0$; б) $x^3+4x^2+5x+2\leqslant 0$;

в) $2x^3-3x^2+7x-3>0$.

21. а) $x^4-3x^3+x^2+3x-2\geqslant 0$; б) $x^4+6x^3+6x^2+6x+5<0$.

22. а) $3x^4-10x^2+3>0$;

б) $3x^2(x-4)^2<32-5(x-2)^2$.

23. а) $(x^2-x)^2+3(x^2-x)+2\geqslant 0$;

б) $x(x+1)(x+2)(x+3)<48$.

24. а) $(x+1)^4>2(1+x^4)$;

б) $x^4-x^3-10x^2+2x+4<0$.

25. Докажите, что многочлен $P(x)=x^8-x^5+x^2-x+1$ положителен при любом $x\in R$.

26. Пусть $P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$ и $Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n$, $m\in N$, $n\in N$, $Q(x)\not\equiv 0$. Докажите, что неравенства $P(x)/Q(x)>0$ и $P(x)Q(x)>0$ равносильны.

Решите неравенства:

27. а) $\frac{1}{x} < \frac{2}{x-2}$; б) $\frac{x+4}{x-2} < \frac{2}{x+1}$; в) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \leqslant$ $\leqslant \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$; г) $\frac{x^2-x+1}{x-1} + \frac{x^2-3x+1}{x-3} > 2x - \frac{1}{4x-8}$; д) $\frac{x^3-2x^2+5x+2}{x^2+3x+2} \geqslant 1$; е) $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+7} > 0$.

28. а) $\frac{1}{x^2+x} \leqslant \frac{1}{2x^2+2x+3}$; б) $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} -$ $- \frac{1}{x-4} < \frac{1}{30}$; в) $\frac{4x-17}{x-4} + \frac{10x-13}{2x-3} > \frac{8x-30}{2x-7} + \frac{5x-4}{x-1}$.

29. а) $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} < \frac{5}{4}$; б) $x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} \leqslant 5$.

30. а) $\frac{(x+1)^4}{x(x^2+1)} > \frac{128}{15}$; б) $x^3 - \frac{1}{x^3} \geqslant 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

31. $\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2 + \frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2 < \frac{2x^2+72}{x^2-36}$.

32. $|x^3 - x| \leqslant x$. 33. $\frac{4}{|x+1|-2} \geqslant |x-1|$.

34. Найдите производную функции а) $y = x^3 - 6x^2 + 1$; б) $y = -x^3 + \frac{1}{3}x - 2$; в) $y = x^4 - 6x + 3$; г) $y =$ $= -\frac{1}{2}x^4 + x^3$; д) $y = (x+2)(x^2 - x + 5)$; е) $y =$ $= (3-x)(x-x^2)$; ж) $y = (x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 3)$; з) $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$; и) $y = \frac{x}{1+x^2}$; к) $y =$ $= \frac{1-x}{2+x^2}$; л) $y = \frac{x^3-x}{x+3}$; м) $y = \frac{x^4+4x}{(x+1)^2}$; н) $y =$ $= \frac{(x^3-1)(x+3)}{x-4}$; о) $y = x^3 + \frac{1}{1-x}$; п) $y = (2-3x)^{30}$; р) $y = \left(6x^2 - \frac{4}{x} + 1\right)^8$; с) $y = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^3$; т) $y = (x^4 - x^3 +$ $+ 5x^2 - 2)^8$.

35. В указанной точке x_0 вычислите значение производной функции а) $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 2)$, $x_0 = 0$; б) $y = (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2 + 1)$, $x_0 = 1$; в) $y = (x^2 - 1) \times$ $\times (x^2 - 4)(x^2 - 9)$, $x_0 = -2$; г) $y = \frac{x^5}{(x-2)^2}$, $x_0 = 1$; д) $y = \frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$, $x_0 = 0$; е) $y = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+1}$, $x_0 = -1$; ж) $y = (1 + x^3)(5 - 1/x^2)$, $x_0 = a$; з) $y = \frac{a-x}{1+x^2}$,

$x_0 = a$; и) $y = [(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)]^5$, $x_0 = 0$; к) $y = -x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$, $x_0 = 0$, $n \in N$.

36. В заданной точке $P(x_0; y_0)$ составьте уравнение касательной к кривой а) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$, $P(0; 0)$; б) $y = x^3 - 3x^2 + 2$, $P(0; 2)$; в) $y = (x-2)^2(x+1)$, $P(1; 2)$; г) $y = 2x^4 - x^3 + 1$, $P(-1; 4)$; д) $y = (x-4)^3(2x+1)$, $P(2; -40)$; е) $y = x - \frac{1}{x}$, $P(1; 0)$; ж) $y = \frac{1}{x^4} + 2$, $P(1; 3)$.

37. На кривой $y = x^3 - 3x + 2$ найдите точки, в которых касательная параллельна прямой $y = 3x$.

38. В какой точке касательная к графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 9x + 8$ будет параллельна биссектрисе I и III координатных углов?

39. В каких точках линии $y = x^3 + x - 2$ касательная к ней параллельна прямой $y = 4x + 5$?

40. На кривой $y = x^2(x-2)^2$ найдите точку, в которой касательная к ней параллельна прямой $y = 24x - 1$.

41. На линии $y = 1/(1 + x^2)$ найдите точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

42. Покажите, что любая касательная к кривой $y = x^5 + 8x - 1$ составляет с осью Ox острый угол.

Найдите критические точки функций:

43. а) $y = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x - \sqrt{3}$; б) $y = x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x - 3\sqrt{3}$; в) $y = 3x^3 - x^2 + 5x + 0{,}7$; г) $y = (x+2)^2(3x-1)$; д) $y = x^3 + 3x$; е) $y = x^3 - 9x$.

44. а) $y = x^4 + 8x^3 - 64x + 1$; б) $y = 3x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 72x - 3$; в) $y = x^4 + 6x^2 + 5$; г) $y = -x^4 + 4x$; д) $y = x^4 + 8x^3$.

45. а) $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 - 3(x+1)$; б) $y = 0{,}6x^5 - 13x^3 + 108x - 5$; в) $y = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + 3x^3\right) + 5\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right) + 4x - 7$; г) $y = \frac{x^7}{7} - 7x + \pi$; д) $y = x^2 + \frac{16}{x}$.

46. Найдите интервалы монотонного убывания функции а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 15$; б) $y = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2$; в) $y = x^5 - 20x^3 + 1$; г) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

47. Найдите интервалы монотонного возрастания функции а) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 11$; б) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$; в) $y = 0{,}25x^4 + x^2 - 6$; г) $y = \frac{x+2}{x^2-1}$; д) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

48. Определите точки экстремума функции а) $y = x^3 + 3x^2 - 45x + 1$; б) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 3$; в) $y = |3x - 1| - x^3$; г) $y = (x-1)^3(x+2)$; д) $y = (x+3)^2 \times (x-4)^2$; е) $y = 2x^2 + \frac{4}{x}$; ж) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

49. Найдите модуль разности экстремумов функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1.$$

50. В указанных промежутках найдите наименьшее и наибольшее значения функции

а) $y = x^3 + 9x - 3$ на отрезке $[-1; 0]$;

б) $y = 6x - x^3$ на отрезке $[-2; 1]$;

в) $y = (x+2)^3(x-1)$ на отрезке $[-1; 2]$;

г) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 4$ на отрезке $[-1; 2]$;

д) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$ на отрезке $[-2; -1]$.

Исследуйте функции с помощью производной и постройте их графики:

51. $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

52. $y = -x(x^2 - 4) - 3$.

53. $y = (x+2)^2(x-1)^2$.

54. $y = -x^4 + 2x^2 + 8$.

55. $y = (x-1)^3(x+1)^2$.

56. $y = x + 1/x$.

57. $y = \frac{x}{1+x^2}$.

58. $y = \frac{x}{x^2-1}$.

59. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

60. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$.

61. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Решите системы уравнений:

1. а) $\begin{cases} 3x - y = 0, \\ -x + y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 2x - 4y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0 \cdot x - 0 \cdot y = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0 \cdot x + y = 0, \\ 0 \cdot x - 0 \cdot y = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = -1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 2. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ -x + 5y = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 8y = 3, \\ x - 2y = {}^3/_4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + y = -1, \\ 9x + 3y = -2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y - 4x = a, \\ 8x - 2y = 1. \end{cases}$

3. При каких значениях k совместна система уравнений

а) $\begin{cases} kx + y = 2, \\ x - y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} kx + 4y = 4, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + (k-1)y = k + 1, \\ (k+1)x + y = 3? \end{cases}$

4. Найдите все значения m, при которых не имеет решений система уравнений

а) $\begin{cases} 2x + (9m^2 - 2)y = 3m, \\ x + y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} m^2x + (2-m)y = m^3 + 4, \\ mx + (2m-1)y = m^5 - 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2mx + y = 6m^2 - 5m + 1, \\ x + 2my = 0. \end{cases}$

5. Найдите c и d, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (c+1)^2 x - (c+1)y = -c, \\ (d-1)x + (5-2d)y = c + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$.

6. Одним из решений системы уравнений

$$\begin{cases} ax - by = 2a - b, \\ (c+1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$

является упорядоченная пара чисел (1; 3). Определите числовые значения a, b и c.

7. Найдите $b \in \boldsymbol{R}$ такие, чтобы при любых $a \in \boldsymbol{R}$ имела хотя бы одно решение система уравнений

а) $\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = a, \\ ax + 3y = b. \end{cases}$

8. Найдите все a и b, при которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} ax+2y=b+1, \\ x+y=3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+y=a^2+2, \\ x+3y=3. \end{cases}$$

9. При каких значениях k существуют решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+ky=3, \\ kx+4y=6, \end{cases}$$

удовлетворяющие одновременно неравенствам $x>1$, $y>0$?

10. При каких значениях a решения системы уравнений

$$\begin{cases} -2x+y=a^2-1, \\ 3x+2y=2a^2+7a+5 \end{cases}$$

удовлетворяют неравенству $x\sqrt{y}+3>0$?

Решите системы уравнений:

11. $$\begin{cases} \dfrac{4}{2x+y-1}+\dfrac{3}{x+2y-3}=4{,}75, \\ \dfrac{3}{2x+y-1}-\dfrac{2}{x+2y-3}=2{,}5. \end{cases}$$

12. а) $\begin{cases} |x|+y=4, \\ x+3|y|=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2}=5, \\ \sqrt{(x-y)^2}=1. \end{cases}$

13. Найдите $x\in N$ и $y\in N$, удовлетворяющие уравнению $23x+31y=1000$.

14. На плоскости xOy укажите точки, удовлетворяющие неравенству а) $|x-y|\leqslant 1$; б) $|x+y|\geqslant 2$; в) $|x|-|y|\geqslant 1$; г) $|x|+|y|\leqslant 3$; д) $|x-1|+|y+1|\geqslant 2$; е) $|x+y|+|x-y|\leqslant 2$.

15. На плоскости xOy укажите точки, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 3y-x<5, \\ y+2x<11, \\ 4y+x>9. \end{cases}$$

Найдите также все целые значения x и y, удовлетворяющие этой системе.

16. При каких $a \in R$ точка $(a; a^2)$ расположена внутри треугольника, образованного при пересечении прямых $y = x + 1$, $y = 3 - x$, $y = -2x$?

Решите системы уравнений:

17. $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ -3x + 4y + 2z = 11. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -4t + 1, \\ z = 4t - 5, \\ 4x - 3y - 6z = 5. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0, \\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}, \\ x + 2y - 2z + 6 = 0. \end{cases}$

21. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y + \frac{5}{6}z = 61, \\ x + y + z = 79. \end{cases}$$

а) Найдите значение суммы $\frac{2}{5}y + \frac{z}{2}$; б) из всех натуральных решений системы найдите такое, при котором x принимает наибольшее значение.

22. Известно, что для некоторой функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, выполнены неравенства $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$, $f(3) < -4$. Определите знак коэффициента a.

23. Изобразите множество $\{(x; y; z) \mid |x| + |y| + z \leq 1\}$ и назовите полученную фигуру.

§ 6. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С НЕСКОЛЬКИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Решите системы уравнений:

1. а) $\begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 5y - 4 = 0, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2xy - y^2 + 5x + 20 = 0, \\ 3x + 2y - 3 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 200, \\ x + 2y = 100; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + 9y^2 + 6xy - 6x - 18y - 40 = 0, \\ x + 30 = 2y. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = -4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x+y=1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ x+y=3; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^5+y^5=275, \\ x+y=5; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x^3-y^3=63, \\ xy=4. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} x+y+xy=-11, \\ x^2+y^2+xy=13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2y-xy^2=30, \\ x+xy-y=13; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1, \\ x+y=0{,}9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y+x/y=1/2, \\ \frac{(x+y)\,x}{y}=-\frac{1}{2}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^3y+x^3y^2+2x^2y^2+x^2y^3+xy^3=30, \\ x^2y+xy+x+y+xy^2=11. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} 2x^2+xy-45y^2=0, \\ 2x+9y^2=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-5xy=16, \\ 2xy+y^2=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy=12, \\ (x+y)^2-\frac{1}{2}y^2=7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3+xy^2=10, \\ x^2y-y^3=-3. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^2(x^2-3)+xy+1=0, \\ y^2(3x^2-6)+xy+2=0. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} \frac{x}{y}(x+y-2)=\frac{2}{3}, \\ \frac{y}{x}(x+y-1)=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{y}{3}=3, \\ \frac{x}{2}+\frac{3}{y}=\frac{3}{2}. \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} y^2-|xy|+2=0, \\ 8-x^2=(x+2y)^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |xy-2|=6-x^2, \\ 2+3y^2=2xy. \end{cases}$

8. Найдите все пары чисел x, y, для которых одновременно выполняются условия $x^2-2xy+12=0$, $x^2+4y^2\leqslant 60$ и $x\in Z$.

9. Найдите натуральные решения системы

$$\begin{cases} x = y + 2, \\ xy \leqslant 17, \\ (y+1)/(x+2) < 1/2. \end{cases}$$

10. Найдите все значения a, при которых множество

$$\{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 + 2x \leqslant 1\} \cap \{(x;\ y) \mid x - y + a \geqslant 0\}$$

содержит только одну точку. Найдите эту точку.

11. Решите уравнение а) $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$; в) $(x+y-a)^2 + (y-1)^2 + (x+3)^2 = 0$.

Решите системы уравнений:

12. а) $\begin{cases} x + 2y - z = 5, \\ 3x - 4y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2u + v + w = 6, \\ 3u + 2v + w = 9, \\ 3u^3 + 2v^3 + w^3 = 27. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ xy + yz + zx = -5, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 12. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} xy + x + y = 7, \\ yz + y + z = -3, \\ xz + x + z = -5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 - yz = 14, \\ y^2 - xz = 28, \\ z^2 - xy = -14. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ y^2 + yz + z^2 = 7, \\ z^2 + zx + x^2 = 19. \end{cases}$

17. $\begin{cases} xy + xz = 8, \\ yz + xy = 9, \\ xz + yz = -7. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 5xy/(x+y) = 1, \\ 7yz/(y+z) = 1, \\ 6xz = x + z. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4xy + y^2 + 2z^2 = -3, \\ 4xz + x^2 + 2z^2 = 1, \\ 8yz + y^2 + 2z^2 = 1. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} y^3 = 9x^2 - 27x + 27, \\ z^3 = 9y^2 - 27y + 27, \\ x^3 = 9z^2 - 27z + 27. \end{cases}$

21. Найдите все тройки целых чисел $(x;\ y;\ z)$, для которых выполняется соотношение $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30$.

22. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, задаваемое системой неравенств

а) $\begin{cases} y + 2x \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 - 5 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y \leqslant 0, \\ 2x^2 + y - 1 \leqslant 0. \end{cases}$

23. Изобразите на плоскости множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

а) $\begin{cases} 2y \geqslant x^2, \\ y \leqslant -2x^2+3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y+x^2 \leqslant 0, \\ y-2x+3 \geqslant 0, \\ y+1 \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 1, \\ x^2+y^2 \leqslant 16. \end{cases}$

ГЛАВА II
ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 1. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Решите уравнения:

1. $\sqrt{x+1}=a.$

2. $\sqrt{x+3}=\sqrt{a-x}.$

3. $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2.$

4. а) $11+2x=\sqrt{22-x};$

б) $21+\sqrt{2x-7}=x;$

в) $2\sqrt{x+5}=x+2;$

г) $3x-\sqrt{18x+1}+1=0.$

5. а) $\sqrt{x+10}+\sqrt{x-2}=6;$

б) $\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1;$

в) $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6;$

г) $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6};$

д) $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{x}=a;$

е) $\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+5x-2}=1.$

6. а) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1;$

б) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5;$

в) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4;$

г) $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6}=7;$

д) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1;$

е) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4}$;

ж) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$;

з) $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=|5-x|$.

7. а) $x+12\sqrt{x}-64=0$;

б) $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$;

в) $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$;

г) $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$;

д) $x\sqrt{x^2+15}-2=\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}$;

е) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{3}{2}$;

ж) $\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}+2\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=3$;

з) $\sqrt{2-x}+\frac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$;

и) $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x)$.

8. $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-3}=a$.

9. Найдите область определения и множество значений функции а) $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{1+x}$; б) $y=\sqrt{-4x^2+4x+3}$.

Решите уравнения:

10. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{4-x}=2$. 11. $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$.

12. $\sqrt{2x-1}-x+a=0$.

13. $\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}=a-x$.

14. $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a$.

15. $\sqrt{x+\sqrt{a^2+2a-3}}+$
$+\sqrt{x+a+\sqrt{1-2a+2a^2-a^3}}=a\sqrt{1-x}$.

Решите неравенства:

16. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0$. 17. $\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}}>-1$.

18. $\sqrt{4-x^2}+\frac{|x|}{x}\geqslant 0$.

19. $(1-a)\sqrt{2x+1}<1$.

20. $\sqrt{x+1}>\sqrt{3-x}$. 21. $\sqrt{x+2}\geqslant\sqrt{x-a}$.

22. а) $\sqrt{24-10x} > 3-4x$;

б) $x > \sqrt{1-x}$; в) $x > \sqrt{24-5x}$;

г) $\left|\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}\right| < \frac{1}{x}-\frac{1}{2}$;

д) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}-\sqrt{2-x}} > 0$.

23. а) $\sqrt{x^2+x-12} < x$; б) $1-\sqrt{13+3x^2} \leqslant 2x$;

в) $\sqrt{x^2+x} > 1-2x$; г) $4-x < \sqrt{x^2-2x}$.

24. $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$.

25. а) $\frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} < 4$; б) $\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} > -\frac{1}{3}$;

в) $\sqrt{x+2}-\sqrt{5x} > 4x-2$;

г) $\sqrt{x+1}+1 < 4x^2+\sqrt{3x}$.

26. $\frac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x} < 1$.

27. $2(x+\sqrt{x^2+4x+3}) < 3(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}-2)$.

28. При каких значениях $p \in Z$ функция $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$, $n \in N$, является четной?

29. Существует ли такое постоянное число T, $T \neq 0$, при котором для функции $f(x) = \sqrt{x-1}$ выполняется равенство $f(x) = f(x+T)$?

30. Найдите производную функции (получите формулы, используя определение производной) а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = 3\sqrt[3]{x}$; в) $y = \sqrt[n]{x}$.

31. Найдите производную функции

а) $y = \sqrt{x} - 1/\sqrt{x}$; б) $y = x^2\sqrt{x}$;

в) $y = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$;

г) $y = (1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})$;

д) $y = (1+\sqrt{x})/(1+\sqrt{2x})$; е) $y = \sqrt{1-x^2}$;

ж) $y = (1-2x^{1/6})^4$; з) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

32. В указанной точке $M(x_0; y_0)$ вычислите значение производной функции а) $y = (x^2+x+2)^{1/2}$, $M(1; 8)$; б) $y = \sqrt{(x+1)/(x-1)}$, $M(2; \sqrt{3})$; в) $y = \sqrt{(1-x^2)/(1+x^2)}$, $M(0; 1)$.

33. В указанной точке $P(x_0;\ y_0)$ составьте уравнение касательной к кривой а) $y(x)=\sqrt{x}$, $P(4;\ 2)$;

б) $y(x)=x-2\sqrt{x}$, $P(1;\ -1)$;

в) $y(x)=3\sqrt[3]{x^2}$, $P(-8;\ 12)$;

г) $y(x)=\sqrt{x^3+1}$, $P(4;\ 9)$.

34. К графику функции $y=(x+1)\sqrt{x}$ проведена касательная в той точке, где угловой коэффициент равен 2, причем касательная не проходит через начало координат. Найдите точки пересечения этой касательной с координатными осями.

35. Найдите критические точки функции

а) $y=x-4\sqrt{x}+\sqrt{3}$; б) $y=\sqrt{|x-1|}$;

в) $y=\sqrt{x^2-6x+15}$; г) $y=\sqrt{x^2-6x}$;

д) $y=(x-1)\sqrt{x}$; е) $y=(x+2)\sqrt{x-1}$.

36. Найдите интервалы монотонного возрастания функции а) $y=\sqrt{x-4}$; б) $y=\sqrt{x^2-x+1}$;

в) $y=\sqrt{x^2+4x-3}$; г) $y=\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$;

д) $y=36x-3x^2+41\sqrt[3]{x^3}$.

37. Найдите интервалы монотонного убывания функции а) $y=\sqrt{5-2x}$; б) $y=\sqrt{2x-x^2}$;

в) $y=\sqrt{2x^2-x+1}$;

г) $y=\dfrac{8-x}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$, $x\geqslant 0$;

д) $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{3}{2}x-3\sqrt{x}+1$.

38. Докажите, что для всех $x\in]1;\ \infty[$ выполняется неравенство $2\sqrt{x}>3-1/x$.

39. На указанных отрезках найдите наибольшее и наименьшее значения функции

а) $f(x)=\sqrt{100-x^2}$, $x\in[-6;\ 8]$;

б) $f(x)=x+2\sqrt{x}$, $x\in[0;\ 4]$;

в) $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$, $x\in[0;\ 3]$.

40. Найдите точки экстремума, а также наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=(x-1)^2\sqrt{x^2-2x+3}$ на сегменте $[0;\ 3]$.

41. С помощью производной исследуйте и постройте график функции а) $y = x\sqrt{2 - x^2}$; б) $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

§ 2. СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Решите системы уравнений:

1. а) $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-7}} - \dfrac{4}{\sqrt{y+6}} = \dfrac{5}{3}, \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}} + \dfrac{3}{\sqrt{y+6}} = \dfrac{13}{6}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x-y} - \sqrt[4]{x+y}} = 1, \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} + \dfrac{4}{\sqrt[4]{x+y} - \sqrt[4]{x-y}} = \dfrac{9}{4}. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2x-1}} + 4\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+y}} = 5, \\ x = y + 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{10}{3}, \\ xy - 2x - 2y = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{12}{x-y}, \\ xy = 15. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y\sqrt{x^2+y^2} - 2ay - 3 = 0, \\ x\sqrt{x^2+y^2} = 2ax. \end{cases}$

5. При каких значениях a имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y} = 1/\sqrt{x}, \\ y = ax + 1? \end{cases}$$

6. При каких значениях a совместна система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2xy+y^2} + \sqrt{x^2-2xy+y^2} = 4, \\ \sqrt{x^2+y^2} = a? \end{cases}$$

7. Решите систему неравенств $\begin{cases} \sqrt{4-3x} \geqslant x, \\ \sqrt{x}+\sqrt{x-1}<5. \end{cases}$

Решите графически следующие неравенства и системы неравенств:

8. $\sqrt{x-y} \geqslant \sqrt{x+y}$. 9. $1+\sqrt{x} \geqslant y$.

10. $\begin{cases} y-2<\sqrt{1-x^2}, \\ y>2|x|. \end{cases}$

§ 3. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВА

1. Какие из чисел а) $(^2/_3)^{0,6}$; б) $(1,4)^{0,6}$; в) $(0,8)^{-^2/_3}$; г) $(1,5)^{-0,1}$; д) $(0,4)^{-0,3}$; е) $(0,7)^{0,4}$; ж) $(4,8)^{-0,8}$; з) $(0,(3))^{\sqrt{2}}$; и) $(\sqrt{3})^{0,43}$; к) $e^{0,75}$; л) $(\pi/2)^{\sqrt{2,1}}$; м) $(\pi/7)^{-\sqrt{3,1}}$ больше единицы?
2. Что больше, x или y, в неравенстве
   а) $(0,8)^x > (0,8)^y$; б) $(1,5)^x < (1,5)^y$;
   в) $(7,1)^x > (7,1)^y$; г) $(^1/_5)^x < (^1/_6)^y$, $x, y \in R$?
3. Что больше: 2^{300} или 3^{200}?
4. Упростите следующие выражения:
   а) $25^{\log_5 3}$; б) $e^{\ln \ln 3}$; в) $\ln ab - \ln|b|$;
   г) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$; д) $2^{\frac{1}{\log_3 2}}$; е) $\frac{\log_2 25}{\log_3 5}$;
   ж) $\log_2 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$; з) $\sqrt{\log_{0,5}^2 4}$;
   и) $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$.
5. Найдите а) $\log_{30} 8$, если $\log_{30} 3 = c$, $\log_{30} 5 = d$;
   б) $\log_9 40$, если $\lg 15 = c$, $\log_{20} 50 = d$;
   в) $\lg (0,175)^4$, если $\lg 196 = c$, $\lg 56 = d$.
6. Докажите, что если $a = \log_{12} 18$, $b = \log_{24} 54$, то
$$ab + 5(a-b) = 1.$$
7. Не пользуясь таблицами, вычислите
$$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}.$$
8. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$
$$\log_n (n+1) > \log_{n+1} (n+2).$$

9. Докажите (без использования таблиц), что $\log_4 9 > \log_9 25$.

Решите уравнения:

10. а) $3^{x-5}=7$; б) $3^{|3x-4|}=9^{2x-3}$;

в) $7^{x+2}-\frac{1}{7}\cdot 7^{x+1}-14\cdot 7^{x-1}+2\cdot 7^x=48$;

г) $2^{2x-3}=4^{x^2-3x-1}$; д) $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$;

е) $4^{\frac{1}{x}-2}=\frac{\ln\sqrt{e}}{2}$; ж) $2^{\frac{3}{\log_5 x}}=\frac{1}{64}$;

з) $\sqrt{3}^{-1+\log_{\sqrt{5}} x}=\frac{1}{3}$;

и) $7^{3x}+9\cdot 5^{2x}=5^{2x}+9\cdot 7^{3x}$;

к) $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{3}{2}}-3^{2x-1}$;

л) $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x(0,\ 125)^{1/x}}}=4\sqrt[3]{2}$;

м) $4\sqrt[3]{(0{,}125)^{x-3}}=2^{\sqrt{x+1}}$;

н) $\left((\sqrt[5]{27})^{\frac{x}{4}}-\sqrt{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{4}}+\sqrt{\frac{x}{3}}=\sqrt[4]{3^7}$.

11. а) $4^{x^2+2}-9\cdot 2^{x^2+2}+8=0$;

б) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$;

в) $(\sqrt[6]{3})^x+(\sqrt[10]{3})^{x-10}=84$;

г) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$.

12. а) $4^{x+1.5}+9^x=6^{x+1}$;

б) $25^{2x-x^2+1}+9^{2x-x^2+1}=34\cdot 15^{2x-x^2}$;

в) $2^{2x^2}+2^{x^2+2x+2}=2^{3+4x}$;

г) $\left(\sqrt{5\sqrt{2}-7}\right)^x+6\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x=7$.

13. а) $3^{2x^2}-2\cdot 3^{x^2+x+6}+3^{2(x+6)}=0$;

б) $x^2\cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1}+2^x=2^{\sqrt{2x+1}+1}+x^2\cdot 2^{x-2}$.

14. а) $4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5}=50$; б) $x^{\log_x(1-x)^2}=9$.

15. $\log_3(x^2+4x+12)=2$.

16. а) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=5{,}5$;

б) $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3$;

в) $\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5$;

г) $\lg(x-4)+\lg(x+3)=\lg(5x+4)$;

д) $\ln(x^3+1)-0{,}5\ln(x^2+2x+1)=\ln 3$;

е) $\log_5(x-2)+2\log_5(x^3-2)+\log_5(x-2)^{-1}=4$;

ж) $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$;

з) $\log_2(x+2)^2+\log_2(x+10)^2=4\log_2 3$;

и) $\log_2\frac{x-2}{x-1}-1=\log_2\frac{3x-7}{3x-1}$;

к) $2\log_2\frac{x-7}{x-1}+\log_2\frac{x-1}{x+1}=1$;

л) $\log_3(5x-2)-2\log_3\sqrt{3x+1}=1-\log_3 4$;

м) $\lg(3x-2)-2=\frac{1}{2}\lg(x+2)-\lg 50$;

н) $\lg^2\left(1+\frac{4}{x}\right)+\lg^2\left(1-\frac{4}{x+4}\right)=2\lg^2\left(\frac{2}{x-1}-1\right)$.

17. а) $\log_2 x^4+\log_a x^2=1$;

б) $\log_2(x-1)-\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+3}=\log_8(x-a)^3+\log_{1/2}(x-3)$;

в) $\log_2(6x^2+25x)=1+\log_2(ax+4a-2)$.

18.

а) $\log_3 x\log_4 x\log_5 x=\log_3 x\log_4 x+\log_4 x\log_5 x+\log_5 x\log_3 x$;

б) $\log_3\frac{3}{x}\log_2 x-\log_3\frac{x^3}{3}=\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$.

19. а) $\lg(10x^2)\lg x=1$;

б) $\frac{\log_2 x-1}{\log_2\frac{x}{2}}=2\log_2\sqrt{x}+3-\log_2^2 x$;

в) $2\log_9 x+9\log_x 3=10$;

г) $\log_x(125x)\log_{25}^2 x=1$;

д) $\log_x\sqrt{5}+\log_x 5x-\frac{9}{4}+\log_{\frac{x}{5}}\sqrt{5}$;

е) $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$;

ж) $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)=4-\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)$;

з) $\lg^2(4-x)+\lg(4-x)\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)-2\lg^2\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$.

20. а) $(x^2\log_x 27)\log_9 x=x+4$;

б) $\log_x 2-\log_4 x+\frac{7}{6}=0$;

в) $\log_{0,5x}x^2-14\log_{16x}x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0$;

г) $4\log_x^2\sqrt{x}+2\log_{4x}x^2=3\log_{2x}x^3$;

д) $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1$;

е) $\left(\log_{1/\sqrt{1-x}}10\right)\lg(x^2-3x+2)=$

$=(\lg(x-3))\log_{1/\sqrt{1+x}}10-2$.

21. а) $\frac{\log_x(2a-x)}{\log_x 2}+\frac{\log_a x}{\log_a 2}=\frac{1}{\log_{a^2-1}2}$; б) $\frac{\log_{a^2}(x-a)}{\log_{2x}a}+(\log_{ax}a)\log_{\frac{1}{a}}2x=0$.

22. а) $\sqrt{1+\log_{0,04}x}+\sqrt{3+\log_{0,2}x}=1$;

б) $\sqrt{2-\log_x 9}=-\frac{\sqrt{12}}{\log_3 x}$;

в) $\log_x(x^2+1)=\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(x^2(1+x^2))+4}$;

г) $\sqrt{\log_2 x}-0,5=\log_2\sqrt{x}$.

23. а) $\lg(3^x-2^{4-x})=2+\frac{1}{4}\lg 16-\frac{x}{2}\lg 4$;

б) $\log_3\left(\log_9 x+\frac{1}{2}+9^x\right)=2x$;

в) $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=\log_5 0,2$.

24. а) $\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=1+\lg(2^{x-2}+1)$;

б) $\lg(6\cdot 5^x+25\cdot 20^x)=x+\lg 5$.

25. а) $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_5(2^x-2)^2=2$;

б) $x(1-\lg 5)=\lg(4^x-12)$;

в) $\log_2(4^x+1)=x+\log_2(2^{x+3}-6)$;

г) $\log_3(9^x+9)=x-\log_{\frac{1}{3}}(28-2\cdot 3^x)$;

д) $\log_2\left(\frac{8}{2^x}-1\right)=x-2$;

е) $\log_{\frac{1}{3}}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^x-4\right)$.

26. а) $(x+1)^{\lg(x+1)}=100(x+1)$; б) $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x}$; в) $3^{\lg x}=54-x^{\lg 3}$; г) $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}$.

27. $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$.

28. $\left(3^{x^2-7,2x+3,9}-9\sqrt{3}\right)\lg(7-x)=0$.

29. $3\cdot 2^{\log_x(3x-2)}+2\cdot 3^{\log_x(3x-2)}=5\cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)}$.

30. Известно, что $x=9$ является корнем уравнения

$$\log_\pi(x^2+15a^2)-\log_\pi(a-2)=\log_\pi\frac{8ax}{a-2}.$$

Найти другие корни этого уравнения.

31. $|1-\log_{1/5}x|+2=|3-\log_{1/5}x|$.

32. $\log_4(6+\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2|)=$
$=\frac{1}{2}+\log_2|\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2||$.

33. а) $5^x+12^x=13^x$; б) $3^x+4^x+5^x=6^x$;
в) $2^x=1-x$; г) $\log_2(4-x)=x-3$.

Решите системы уравнений:

34. а) $\begin{cases}4^{x+y}=128,\\5^{3x-2y-3}=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_{a^2}x-\log_{a^4}y=3,\\\log_{a^6}x+\log_{a^3}y=4;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2^{x+y-1}+2^{x-y+1}=3,\\\frac{1}{7}\cdot 3^{x\log_3 2+y\log_3 2-2}+3^{x\log_3 2-y\log_3 2-2}=\frac{1}{7}.\end{cases}$

35. а) $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50,\\\lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x^{\log_3 x^2}=\log_3(x+y),\\x^2+y^2=65.\end{cases}$

36. а) $\begin{cases}\log_2(x+y)-\log_3(x-y)=1,\\x^2-y^2=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(3y^2+1)\log_3 x=1,\\x^{2y^2+10}=27.\end{cases}$

37. а) $\begin{cases}\log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9,\\x+y=20;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\lg x+\lg y=2,\\x-y=15;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 2,\\\log_3(x+y)=2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}4^{-y}\log_2 x=4,\\\log_2 x+2^{-2y}=4;\end{cases}$

д) $\begin{cases}y+\lg x=1,\\x^y=0{,}01;\end{cases}$ е) $\begin{cases}x^{\lg y}=2,\\xy=20;\end{cases}$

ж) $\begin{cases}2^x\cdot 8^{-y}=2\sqrt{2},\\\log_9\frac{1}{x}+0{,}5=\frac{1}{2}\log_3 9y;\end{cases}$

з) $\begin{cases}(\log_a(xy)-2)\left(\log_a\frac{4}{9}\right)^{-1}=-1,\\x+y=5a.\end{cases}$

38. а) $\begin{cases}2(\log_y x+\log_x y)=5,\\xy=8;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2{,}5,\\x+y=a^2+a.\end{cases}$

39. $\begin{cases} x^2/y + y^2/x = 28, \\ \log_9 x - \log_{\frac{1}{9}} y = 1{,}5. \end{cases}$

40. $\begin{cases} \log_2 y = \log_4 (xy - 2), \\ \log_6 x^2 + \log_3 (x - y) = 1. \end{cases}$

41. $\begin{cases} 2^{x^2+y} = 4^{(y^2+x)/2}, \\ \sqrt{xy} = 2. \end{cases}$

42. $\begin{cases} 4^{x/y - 3y/x} = 16, \\ \sqrt{x} - \sqrt{2y} = \sqrt{12} - \sqrt{8}. \end{cases}$

43. $\begin{cases} x + y = 4 + \sqrt{y^2 + 2}, \\ \lg x - 2\lg 2 = \lg (1 + 0{,}5y). \end{cases}$

44. $\begin{cases} \log_3 (\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}} \left(\log_{\frac{1}{2}} y \right) = 1, \\ xy^2 = 4. \end{cases}$

45. $\begin{cases} \frac{1}{3} \sqrt[y]{9} = 9^{x/(2y)}, \\ \frac{x+3y}{x} = \frac{2x}{y} - 4. \end{cases}$

Решите неравенства:

46. а) $\lg(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$; б) $\log_5 (x^2 - 11x + 43) < 2$;
в) $2 - \log_2 (x^2 + 3x) \geqslant 0$; г) $\log_{1.5} \frac{2x-8}{x-2} < 0$;
д) $\log_3 \frac{1+2x}{1+x} < 1$; е) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{3x+2}{x} \leqslant 0{,}5$;
ж) $\log_2 \frac{x^2-4x+2}{x+1} \leqslant 1$; з) $\log_{\frac{1}{2}}^2 \frac{4x-3}{4-3x} > -\frac{1}{2}$.

47. а) $\log_{\frac{1}{5}} (2x^2 + 5x + 1) < 0$; б) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 2x) > 0$;
в) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 4x + 6) < -2$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$;
д) $\log_{0.25} \frac{35 - x^2}{x} \geqslant -\frac{1}{2}$.

48. а) $\log_5 (2x - 4) < \log_5 (x + 3)$;
б) $\log_{0.1} (x^2 + x - 2) > \log_{0.1} (x + 3)$;
в) $\lg \sqrt{x^2 - 3x + 4} - \lg \sqrt{x + 1} > 0$;
г) $\log_{1/2} (x + 1) \leqslant \log_2 (2 - x)$;
д) $\log_{1/2} \frac{x^2 + 6x + 9}{2(x+1)} < -\log_2 (x + 1)$.

49. а) $\lg (x - 2) + \lg (27 - x) < 2$;
б) $\lg (x - 1) + \lg (x - 2) < \lg (x + 2)$;

в) $\log_2(2-x)+\log_{1/2}(x-1)>\log_{\sqrt{2}}3$;

г) $\log_{1/5}(2x+5)-\log_{1/5}(16-x^2)\leqslant 1$;

д) $\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{4}\right)\geqslant 1$;

е) $\log_7 x-\log_7(2x-5)\leqslant\log_7 2-\log_7(x-3)$;

ж) $\log_{1/3}(x-1)+\log_{1/3}(x+1)+\log_{\sqrt{3}}(5-x)<1$;

з) $\log_2 x^2+\log_2(x-1)^2>2$.

50. а) $2^x>5$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2}<\frac{27}{64}$;

в) $(1/2)^{\log_3(x^2-2x-3)}>1$; г) $3^{\log_3(x^2-3x+2)}>3$;

д) $5^{\log_5\frac{x-2}{x}}<1$; е) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x}<\left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$;

ж) $3^{\sqrt{x}}>2^a$.

51. а) $\lg^2 x+3\lg x-4\geqslant 0$; б) $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leqslant\frac{1}{2}$;

в) $\log_{1/3}x>\log_x 3-\frac{5}{2}$;

г) $(\log_2 x)^4-\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^3}{4}\right)^2-20\log_2 x+148<0$;

д) $(2\log_3^2 x-3\log_3 x-8)(2\log_3^2 x-3\log_3 x-6)\geqslant 3$;

е) $(\log_3^2 x+3\log_3 x+1)(\log_3^2 x+3\log_3 x-3)<5$;

ж) $(1{,}25)^{1-(\log_3 x)^2}<(0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}}x}$.

52. а) $2^{2x+1}-21\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}+2\geqslant 0$; б) $0{,}1^{x+1}<0{,}8+2\cdot 10^x$; в) $2^x+2^{-x}<3$; г) $3^{4\cdot 3^x}-35\cdot 3^{3x-2}+6\geqslant 0$; д) $\frac{6}{2^x-1}<2^x$; е) $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2$; ж) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\lg x^2}+2>3\cdot 2^{-\lg(-x)}$.

53. а) $\log_2(4^x-5\cdot 2^x+2)>2$; б) $\log_{1/\sqrt{5}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2$; в) $\log_{\sqrt{2}}(5^x-1)\log_{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{5^x-1}>2$; г) $\lg(1+2^{x-1})>\frac{(x\lg 2)\lg 4}{\lg 8}+\lg 3$.

54. а) $\sqrt{\log_2\frac{3-2x}{1-x}}<1$; б) $\sqrt{\log_3(9x-3)}\leqslant\log_3\left(x-\frac{1}{3}\right)$; в) $\sqrt{9^x+3^x-2}\geqslant 9-3^x$.

55. а) $\log_{1/3}(\log_4(x^2-5))>0$; б) $0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_3\frac{3x+6}{x^2+2}}>1$.

56. а) $\log_{4/3}(\sqrt{x+3}-x)>0$;

б) $\log_{1/2}(\sqrt{5-x}-x+1)>-3$.

57. а) $x^{\log_2 x-2}>\frac{x}{4}$; б) $x^{(\lg x)^2-3\lg x+1}>1000$;

в) $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}\geqslant 2$.

58. а) $\log_a(x-1)+\log_a x>2$;

б) $\frac{1}{5-\log_a x}+\frac{2}{1+\log_a x}<1$, $0<a<1$;

в) $\frac{3\log_a x+6}{\log_a^2 x+2}>1$; г) $\log_a(1-8a^{-x})\geqslant 2(1-x)$.

59. а) $\log_{x-3}(x-1)<2$; б) $\log_x(x+2)>2$.

60. а) $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$; б) $\log_{x+3}(x^2-x)<1$;

в) $\log_{3x+5}(9x^2+8x+2)>2$; г) $\log_{2x+4}(x^2+1)\leqslant 1$;

д) $\log_x\frac{15}{1-2x}<-2$.

61. а) $\log_{x^2}(3-2x)>1$; б) $\log_{x^2+3x}(x+3)<1$.

62. $\log_{\frac{2}{3}|x-2|}2^{1-x^2}\geqslant 0$.

63. $\log_{\log_3\left(\frac{1}{2}x\right)}(x^2-10x+22)>0$.

64. а) $|x|^{x^2-x-2}<1$; б) $\left|\log_2\frac{x}{6}\right|^{x^2-15x+56}>1$.

65. а) $\frac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x}<0$; б) $-\frac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{2x-x^2+8}}\geqslant 0$;

в) $\frac{\log_{0,5}x+2}{\sqrt{2x-1}}>0$; г) $\frac{3x^2-2x-1}{\log_3(x-1)}<0$.

66. а) $25\cdot 2^x-10^x+5^x>25$; б) $\log_5 x+\log_x\frac{x}{3}>$

$>\frac{(\log_5 x)(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$; в) $\frac{1}{\log_5\frac{x+1}{x+2}}\leqslant\frac{1}{\log_5(x+3)}$.

Решите системы неравенств:

67. а) $\begin{cases}\frac{\sqrt{(x-8)(2-x)}}{\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}\geqslant 0,\\ 2^{x-8}-31>0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\frac{\sqrt{\log_3^2 x-3\log_3 x+2}}{\log_5\left(\frac{1}{3}(\log_3 5-1)\right)}\geqslant 0,\\ x-\sqrt{x}-2\geqslant 0.\end{cases}$

68. $\begin{cases} \left(\frac{1}{81}\right)^{\log_a^2 x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\ln \frac{2}{a} x}, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$

69. Какие из указанных ниже функций четны и какие нечетны? а) $y = 2^{-x^2}$; б) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$; в) $y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$; г) $y = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$; д) $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$; е) $y = x\frac{a^x - 1}{a^x + 1}$; ж) $y = \ln \frac{1 - x}{1 + x}$; з) $y = \log_2 (x + \sqrt{x^2 + 1})$.

70. Функцию $y = 3^x$ представьте в виде суммы четной и нечетной функций.

71. Дана функция $y = (1/2)^{\sin x}$. Найдите наименьший положительный период этой функции. Является ли она нечетной?

72. Для функции $y = (e^x - e^{-x})/2$ найдите обратную функцию.

Постройте графики уравнений:

73. $y = 3^{-x}$.
74. $y = \log_2 (1 - x)$.
75. $y = \log_2 (1 - x)$.
76. $y = \log_2 (2 - x)^2$.
77. $y = \frac{\ln x}{\ln x}$.
78. $y = x^{\log_2 x^2}$.
79. $y = e^{\ln |x|}$.
80. $y = \log_2 (x^2 - 2x)$.
81. $y = \log_2 \left| \frac{x}{x - 1} \right|$.
82. $y = \log_2 \sin x$.
83. $|y| = \log_2 (-x)$.

Найдите производные функций:

84. а) $y = 3^x$; б) $y = 10^x$; в) $y = 1/2^x$; г) $y = e^x + e^{-x}$; д) $y = 2e^x - e^{-x}$; е) $y = 3^x + 4^x$; ж) $y = x \cdot 10^x$; з) $y = xe^x$; и) $y = x/e^x$; к) $y = \sqrt{2^x}$; л) $y = e^{x^3 - 5x^2}$; м) $y = \frac{e^x}{1 + x}$.

85. а) $y = \log_3 x$; б) $y = \log_2 x + \log_{1/3} x$; в) $y = \log_5 \sqrt{x}$; г) $y = \log_7 x^5$; д) $y = x + \ln x$; е) $y = x \ln x$; ж) $y = \ln^2 x$; з) $y = \sqrt{\ln x}$; и) $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$; к) $y = \frac{\ln x}{1 - x^2}$.

86. В точке x_0 найдите значение производной функции а) $y = 4^x$, $x_0 = 2$; б) $y = e^{-x}$, $x_0 = \ln 3$; в) $y = -\ln (x^2 - 4x)$, $x_0 = 5$; г) $y = x \ln^2 x$, $x_0 = e$.

87. В указанной точке $K(x_0; y_0)$ составьте уравнение касательной к кривой а) $y = e^x$, $K(0; 1)$; б) $y = -\ln x$, $K(1; 0)$.

Найдите критические точки функций:

88. а) $y = 2^x - x\ln 2 + 1$; б) $y = e^x(-x^2 + 4x - 1)$;
в) $y = e^{-x}(x^2 + 5x + 7)$; г) $y = xe^{x-x^2}$;
д) $y = e^{-2x} + (6 - 2a)e^{-x} + 6ax + \operatorname{ctg} 3$;
е) $y = (0{,}2)^{2x} + (2a + 2)\left(\frac{1}{5}\right)^x - (2a \ln 5)x + \ln 3$;
ж) $y = e^{|x|} - 2x + 1$.

89. а) $y = \ln(4x - x^2)$; б) $y = \ln^2 x - 6\ln x + 5$;
в) $y = 4\ln 3 - 16\ln(x^2 + 3x) + 0{,}5(x^2 + 3x)^2$.

90. Определите интервалы, в которых монотонно возрастает функция

$$f(x) = 0{,}3125\,(1/2)^{3x^2-8x} + 5(\ln 2)(3x^2 - 8x + 1).$$

91. Определите интервалы, в которых монотонно убывает функция

$$f(x) = x^2 \ln 27 - 6x \ln 27 + (3x^2 - 18x + 24)\ln(x^2 - 6x + 8).$$

92. Найдите интервалы возрастания и убывания функций а) $y = x - e^x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$; б) $y = \frac{x}{\ln x} - \frac{\ln 3}{3}$; в) $y = (2^x - 1)(2^x - 2)$.

93. Найдите точки экстремума функции а) $y = -(x^2 - 2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$; б) $y = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} + x - 1$.

94. Найдите значения a и b, при которых функция $f(x) = a\ln x + bx^2 + x + 2$ имеет экстремумы в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

95. В указанных промежутках найдите наибольшее и наименьшее значения функции а) $y = e^{-x}(x^2 + x - 5)$, $x \in [-4; 4]$; б) $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}$, $x \in [-1; 2]$; в) $y = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x$, $x \in [-1; 1]$; г) $y = |x^2 + 2x - 3| + 1{,}5\ln x$, $x \in [1/2; 4]$.

96. При каком значении x выражение $2^{x^2} - 1 + 2/(2^{x^2} + 2)$ принимает наименьшее значение?

97. Решите неравенство $f'(x) < g'(x)$, если а) $f(x) = x + 3\ln(x - 2)$, $g(x) = x + 5\ln(x - 1)$; б) $f(x) = e^{2x} - 3x$, $g(x) = 5(e^x - x + 3)$.

98. Докажите, что для всех $x \in [0; \infty[$, справедливо неравенство а) $e^x > 1 + x$; б) $x > \ln(1 + x)$.

Исследуйте функции с помощью производной и постройте графики:

99. $y = xe^{-x}$. 100. $y = \ln(x^2 + 1)$.

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Докажите тождество а) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \times \cos^2\alpha = 1$; б) $\frac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^6\alpha$.

2. Зная, что $\sin\alpha + \cos\alpha = a$, найдите

а) $|\sin\alpha - \cos\alpha|$; б) $\cos^4\alpha + \cos^4\alpha$.

3. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = p$. Найдите а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$.

4. Найдите а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; б) $\cos(70^\circ + \alpha)$, если $\sin(40^\circ + \alpha) = b$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$; в) $\sin(\alpha + \beta - \gamma)$, если $\sin\alpha = 12/13$, $\cos\beta = 8/17$, $\sin\gamma = 4/5$; $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$, $0 < \gamma < \pi/2$; г) $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

5. Дано: α, β, γ — углы треугольника. Докажите равенство $\sin\alpha\sin\beta - \cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

6. Докажите тождество а) $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$;

б) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

в) $\frac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 1$;

г) $\frac{1 - 2\sin^2\beta}{1 + \sin 2\beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta}$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$;

е) $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha$;

ж) $\frac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - 1} = \cos 2\alpha$;

з) $\frac{\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta} = -\cos^2\alpha\sin^2\beta$;

и) $3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 8\sin^4\alpha$;

к) $\cos^4\alpha = \frac{1}{8}\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{3}{8}$;

л) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2\alpha)$;

м) $4(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1 + 3\cos^2 2\alpha$;

н) $8\left(\sin^8\frac{\alpha}{2} + \cos^8\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + 6\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$.

7. Упростите выражение а) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha}$;

б) $\frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$; в) $\frac{\sin\alpha - 3\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 3\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$;

г) $\frac{2(\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha}$;

д) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$;

е) $\cos 0 + \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \ldots + \cos\frac{6\pi}{7}$.

8. Докажите тождество

а) $\frac{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)} = \operatorname{tg} 2\alpha\cos\alpha$;

б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{3}{2}$;

г) $\sin^2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4}$;

д) $\log_{1/3}[\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta] = 0$;

е) $\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha} - \cos 8\alpha\operatorname{ctg} 4\alpha = \sin 8\alpha$;

ж) $16\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ = 1$;

з) $\sin^2\alpha\cos^4\alpha = \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\cos 2\alpha - \frac{1}{16}\cos 4\alpha - \frac{1}{32}\cos 6\alpha$;

и) $\sin 9\alpha + 3\sin 7\alpha + 3\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 8\sin 6\alpha\cos^3\alpha$;

к) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) =$
$= \operatorname{tg}(\alpha - \beta)\operatorname{tg}(\beta - \gamma)\operatorname{tg}(\gamma - \alpha)$;

л) $\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$,

если $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

9. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}4$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Найдите $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

10. Положительные острые углы α, β, γ удовлетворяют соотношениям $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$. Найдите сумму $\alpha+\beta+\gamma$.

11. Без помощи таблиц вычислите а) $\cos 292^\circ 30'$;

б) $\operatorname{cosec} 10^\circ-\sqrt{3}\sec 10^\circ$; в) $\frac{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$;

г) $-2\sqrt{2}\sin 10^\circ\left(2\sin 35^\circ-\frac{\sec 5^\circ}{2}-\frac{\cos 40^\circ}{\sin 5^\circ}\right)$;

д) $\cos^2 73^\circ+\cos^2 47^\circ+\cos 73^\circ\cos 47^\circ$;

е) $\sin 6^\circ-\sin 42^\circ-\sin 66^\circ+\sin 78^\circ$;

ж) $\frac{\cos^2 33^\circ-\cos^2 57^\circ}{\sin 21^\circ-\cos 21^\circ}$; з) $6\cos 40^\circ-8\cos^3 40^\circ$;

и) $\operatorname{tg}^6 20^\circ-33\operatorname{tg}^4 20^\circ+27\operatorname{tg}^2 20^\circ-3$;

к) $\operatorname{ctg}^2 36^\circ\operatorname{ctg}^2 72^\circ$.

12. Найдите зависимость между x и y, исключив α из соотношений

а) $\begin{cases} x=3\cos\alpha, \\ y=4\sin\alpha; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-2=-2\cos\alpha, \\ y=4\cos^2\frac{\alpha}{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x}=\operatorname{tg}\alpha, \\ \sqrt{y}=\sec\alpha; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x=\sqrt{1-\sin\alpha}, \\ y=\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}. \end{cases}$

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Найдите область определения функции а) $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}2x$; б) $y=5\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$; в) $y=\frac{4}{\cos x}$; г) $y=-\frac{1}{\sin x}$.

2. Найдите область изменения функции а) $y=2\sin\frac{x}{3}+1$; б) $y=5\cos x\sqrt{2}+3$; в) $y=4\operatorname{tg}x\cos x$; г) $y=9\cos 3x-12\cos^3 3x$; д) $y=\cos^4\frac{x}{5}-\sin^4\frac{x}{5}$; е) $y=\operatorname{tg}^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; ж) $y=\sin\sqrt{x}$; з) $y=\cos\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)$; и) $y=\cos(2\sin x)$; к) $y=\sin(\log_2 x)$; л) $y=\cos 2x-\sin 2x$; м) $y=12\sin x+5\cos x+1$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции а) $y=a\cos x+b\sin x+c$; б) $y=10\cos^2 x-6\sin x\cos x+2\sin^2 x$.

4. Найдите область изменения функции $y=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$, заданной на множестве $X=]0;\ \pi/2[$, $x\in X$.

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y=2(1+\sin 3x\sin 2x)-\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 6x).$$

6. Докажите, что функция

$$y=\sin 5x+\sin 3x+5\sin x\cos 2x,\quad x\in R,$$

является нечетной.

7. Докажите, что функция

$$y=\cos 4x+\sin^3\frac{x}{2}\sin x+5x^2,\quad x\in R,$$

является четной.

8. Найдите наименьший положительный период функции а) $y=\sin 3x$; б) $y=\operatorname{tg}2x+2\sin 3x$; в) $y=\cos\frac{x}{2}$; г) $y=\cos^2 x$; д) $y=\sin(\cos x)$; е) $y=\cos(\sin x)$; ж) $y=\cos\frac{3}{5}x-\sin\frac{2}{7}x$.

9. Докажите, что функция $y=\sin\sqrt{x}$ не является периодической.

10. При каких значениях $n\in Z$ функция $y=\sin nx/\sin\frac{x}{n}$ имеет периодом число 4π?

11. Используя только определение возрастающей функции, докажите, что функция $y=\sin x$ возрастает на интервале $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Постройте графики функций:

12. а) $y=\sin 2x$; б) $y=-\sin\frac{x}{3}$; в) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; г) $y=\sin|x|$; д) $y=|\sin x|$; е) $y=\frac{\sin x}{\sin x}$; ж) $y=x+\sin x$; з) $y=x\sin x$; и) $y=\operatorname{cosec}|x|$; к) $y=2^{\sin x}$ л) $y=\sin[\arcsin(\log_{1/2}x)]$.

13. а) $y=\cos\left(-\frac{x}{2}\right)$; б) $y=\cos 2x$; в) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; г) $y=\cos x$; д) $y=\sec x$.

14. а) $y=\operatorname{tg}3x$; б) $y=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; в) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$; г) $y=\operatorname{tg}|x|$; д) $y=|\operatorname{tg}x|$; е) $y=\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x$.

15. Постройте график уравнения а) $|y| = \sin x$; б) $\sin y = \sin x$.

16. Найдите производную функции а) $y = \sin x - \cos x$; б) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; в) $y = \sin^2 x$; г) $y = \cos^2 x$; д) $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$; е) $y = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x$; ж) $y = \sin 3x$; з) $y = \cos\frac{x}{\sqrt{2}}$; и) $y = \sin^2(2x-1)$; к) $y = \cos^3(x^2+x)$; л) $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$.

17. В указанной точке x_0 найдите значение производной функции а) $y = \sin x$, $x_0 = \pi/6$; б) $y = \cos(-2x)$, $x_0 = \pi/4$; в) $y = \operatorname{tg} x - x$, $x_0 = \pi/3$.

18. В указанной точке $A(x_0; y_0)$ составьте уравнения касательной к кривой а) $y = 2\sin\frac{x}{3}$, $A\left(\frac{3}{2}\pi; 2\right)$; б) $y = \cos^2 x$, $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$; в) $y = \operatorname{tg} 2x$, $A\left(\frac{\pi}{8}; 1\right)$.

19. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \sin^2 x - 20\cos x + 1.$$

20. Докажите, что функция

$$f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

есть константа, т. е. не зависит от x. Найдите значение этой константы.

§ 6. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Найдите области определения функций:

1. а) $y = \arcsin(1-x)$; б) $y = \arccos\left(2 - \frac{x}{2}\right)$; в) $y = \arcsin(2x+x^2)$; г) $y = \arccos\frac{2x}{1+x^2}$; д) $y = \arcsin(\cos x)$; е) $y = \arccos(\sin^2 x)$.

2. а) $y = \operatorname{arctg}(1-x^2)$; б) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$; в) $y = \operatorname{arctg}(\log_2 x)$; г) $y = \operatorname{arcctg}(e^x + e^{-x})$.

3. Найдите область изменения функции а) $y = \arcsin\sqrt{x}$; б) $y = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$; в) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$; г) $y = \operatorname{arcctg}(2x - x^2)$.

4. Докажите тождество а) $\sin(\arcsin x) = x$; б) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$; в) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = x/\sqrt{1-x^2}$, $x \in]-1; 1[$.

5. Вычислите а) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$; б) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$; г) $\sin\left(3\arcsin\frac{1}{3}\right)$; д) $\sin\left(\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{63}}{8}\right)$.

6. Докажите тождество а) $\cos(\arccos x) = x$; б) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; в) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}/x$, $x \in [-1; 0[\cup]0; 1[$.

7. Вычислите а) $\cos\left(3\arccos\frac{1}{4}\right)$; б) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$; в) $\sin\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{17}{32}\right)$.

8. Докажите тождество а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$;

б) $\cos(\operatorname{arctg} x) = 1/\sqrt{1+x^2}$;

в) $\sin(\operatorname{arctg} x) = x/\sqrt{1+x^2}$.

9. Вычислите а) $\sin(2\operatorname{arctg} 3)$; б) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} 3)$; в) $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3\right)$; г) $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 5\right)$; д) $\cos\left(\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{24}{7}\right)$.

10. Докажите тождество а) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$;

б) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = 1/x$, $x \neq 0$;

в) $\sin(\operatorname{arcctg} x) = 1/\sqrt{1+x^2}$;

г) $\cos(\operatorname{arcctg} x) = x/\sqrt{1+x^2}$.

11. Докажите, что а) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$ и $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$; б) $\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\arccos x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $0 \leqslant x < 1$; в) $\arcsin x = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ и $\arccos x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $0 < x \leqslant 1$; г) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ при $x > 0$.

12. Выразите а) $\arcsin\frac{3}{5}$; б) $\arccos\frac{12}{13}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$; г) $\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}$ через все обратные тригонометрические функции.

13. Докажите, что а) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $x \in [-1; 1]$; б) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; в) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $x \in [-1; 1]$; г) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

14. Выразите а) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; б) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{24}\right)$; в) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{24}\right)$ через все обратные тригонометрические функции.

15. Докажите, что если $x \in [0; 1]$ и $y \in [0; 1]$, то

а) $\arcsin x + \arcsin y = \arccos(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy)$;

б) $\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$;

в) $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$;

г) $\arccos x - \arccos y = \arcsin(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2})$;

д) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y}$, $x > 0$, $y > 0$;

е) $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$, $x > 0$, $y > 0$;

ж) $\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arctg}\frac{y-x}{1+xy}$, $x > 0$, $y > 0$;

з) $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{xy-1}{x+y}$, $x > 0$, $y > 0$.

16. Произведите указанные действия:

а) $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{12}{13}$; б) $\arccos\frac{7}{25} + \arccos\frac{3}{5}$;

в) $\operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 5$; г) $\arcsin\frac{3}{5} - \arcsin\frac{24}{25}$;

д) $\arccos\frac{5}{13} - \arccos\frac{7}{25}$; е) $\operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 5$;

ж) $\operatorname{arcctg} 5 - \operatorname{arcctg} 4$.

17. Докажите, что а) $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, $x \in [-1; 1]$; б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$.

18. Решите уравнение а) $4\arcsin x + \arccos x = \pi$;

б) $5\operatorname{arctg} x + 3\operatorname{arcctg} x = 2\pi$;

в) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = \pi$.

19. Определите, при каких целых значениях k система уравнений

$$\begin{cases} \arccos x + (\arcsin y)^2 = k\frac{\pi^2}{4}, \\ (\arcsin y)^2 \arccos x = \pi^4/16 \end{cases}$$

имеет решения, и найдите все эти решения.

20. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = (\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3.$$

21. Вычислите а) $\arcsin\left(\sin \frac{10}{7}\pi\right)$;

б) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)$; в) $\arcsin\left(\cos \frac{33}{10}\pi\right)$.

Постройте графики функций:

22. а) $y = \arcsin(x-2)$; б) $y = \arccos\frac{x}{2}$;

в) $y = \arcsin x^3$; г) $y = -\arccos(-x^2)$.

23. а) $y = \operatorname{arctg}(x+1)$; б) $y = \operatorname{arcctg}(3-x)$;

в) $y = \operatorname{arctg}(x^2-1)$; г) $y = \operatorname{arcctg}(4-x^2)$.

24. а) $y = \sin(\arcsin x)$; б) $y = \cos(\arcsin x)$;

в) $y = \arcsin(\sin x)$.

25. Пользуясь формулой для нахождения производной обратной функции, докажите, что

а) $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $x \in]-1; 1[$;

б) $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$, $x \in]-1; 1[$;

в) $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$; г) $(\operatorname{arcctg} x)' = -1/(1+x^2)$.

26. Найдите производную функции

а) $y = \arcsin(1-x)$; б) $y = \arccos(x+2)$;

в) $y = \arcsin\frac{x}{2} + \arccos 2x$; г) $y = x\arcsin x$;

д) $y = \frac{\arccos x}{x}$; е) $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$; ж) $y = \operatorname{arctg} x^2$;

з) $y = \operatorname{arcctg}\, 2^x$; и) $y = \arcsin(\sin x)$;

к) $y = \arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

27. В указанной точке x_0 найдите значение производной функции а) $y = 2\arcsin x$; $x_0 = \sqrt{3}/2$; б) $y = -3\arccos x$, $x_0 = -\sqrt{2}/2$; в) $y = \operatorname{arctg} x^3$, $x_0 = 1$; г) $y = 2\operatorname{arcctg}(x^2-3)$, $x_0 = -1$.

28. В указанной точке $B(x_0; y_0)$ составьте уравнения касательной к кривой

а) $y = \arcsin 3x$, $B\left(\frac{1}{6}; \arcsin\frac{3}{5}\right)$;

б) $y = \operatorname{arcctg}\frac{x}{2}$, $B\left(-2; -\frac{\pi}{4}\right)$.

29. Найдите критические точки функции а) $y = x + \arccos x + 1$; б) $y = x\operatorname{arcctg} x$.

30. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ на отрезке $[0; 1]$.

§ 7. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Решите уравнения:

1. а) $\sin x = -\frac{1}{2}$; б) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;

   в) $2\sin x \cos x - 3\sin 2x = 0$;

   г) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$;

   д) $\sin\sqrt{x} = -1$.

2. а) $\cos x = 0$; б) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$;

   в) $\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$;

   г) $\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{\pi}{4}$; д) $\cos x^2 = 1$.

3. $2\cos\left[\frac{\pi}{6}\left(\sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \sqrt{3}$.

4. Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $\cos x = (a - 1{,}5)/(2 - 0{,}5a)$ имеет решение.

5. Найдите критические точки функции а) $y = 3\sin x + 2(x - 1)$; б) $y = \cos 2x + ax - \sqrt{3}$.

Решите уравнения:

6. а) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = -1$; в) $\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 5$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}$.

7. а) $\operatorname{ctg} x = 1$; б) $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2$; в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - 3\right) = -1$; г) $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \sqrt{7} - \sqrt{2}$.

8. а) $\cos(1{,}5\pi + x) = \sqrt{2}\sin(x + \pi)\cos x$;

   б) $2\sin x \cos x + \sqrt{3} - 2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$;

   в) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$; г) $\operatorname{tg}^3 3x - 2\sin^3 3x = 0$;

   д) $2\operatorname{tg} x \cos x + 1 = 2\cos x + \operatorname{tg} x$.

9. а) $\sin x + \cos^2 x = 1/4$; б) $3\cos x = 2\sin^2 x$;
в) $6\cos^2 x + 13\sin x = 12$;
г) $3\cos^2 x - 4\cos x - \sin^2 x - 2 = 0$;
д) $\cos^4 \frac{x}{5} + \sin^2 \frac{x}{5} = 1$;
е) $\sin x - \frac{2\cos x - 1}{2\cos x - 1}\sin^2 x = \sin^2 x$.

10. а) $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$; б) $2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x = 3$;
в) $\frac{1+3}{\cos^2 x} = 4\operatorname{tg} x$; г) $\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3$.

11. а) $2\cos x(\cos x - \sqrt{8}\operatorname{tg} x) = 5$;
б) $\left(\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\right)(\sec x + \operatorname{tg} x) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x$;
в) $\log_2(3\sin x) - \log_2\cos x - \log_2(1 - \operatorname{tg} x) - \log_2(1 + \operatorname{tg} x) = 1$.

12. а) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x\cos 2x$;
б) $\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0$;
в) $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$;
г) $\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} + \frac{3}{\sin x\cos x} - 4 = 0$;
д) $\operatorname{tg} 5x + 2\sin 10x = 5\sin 5x$.

13. а) $\cos 2x - 3\sin x + 2 = 0$;
б) $\cos(10x + 12) + 4\sqrt{2}\sin(5x + 6) = 4$;
в) $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$; г) $a\sin^2 x + \cos x = 0$.

14. Найдите критические точки функции
а) $f(x) = e^3 - \sqrt{4x^2 - 12x + 9} - 4\sin^2\frac{x}{2}$;
б) $f(x) = \sin^2 3x + 3\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \cos 1$;
в) $f(x) = 2x - 0{,}25\sin 4x + 0{,}5\sin 2x$;
г) $f(x) = \log_2 3 + x(1 - \sqrt{10}) + (\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \cos x)\sin x$;
д) $f(x) = (2\sqrt{2} - 1)(1 + \cos x) - \frac{1}{4}\sin 2x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)x$.

Решите уравнения:

15. а) $\cos^3 x + \cos^2 x - 4\cos^2\frac{x}{2} = 0$;
б) $4\cos x(2 - 3\sin^2 x) = -(1 + \cos 2x)$;

в) $\operatorname{tg}^3 x - 1 + \frac{1}{\cos^2 x} - 3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3$;

г) $8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$.

16. а) $\sin x = 5\cos x$; б) $\sin x - \cos x = 0$;

в) $\sin x + \cos x = 0$; г) $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$;

д) $\cos^2 x - 4\sin x \cos x = 0$.

17. а) $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$;

б) $\sin 2x - \sin^2 x = 2\sin x - 4\cos x$;

в) $\operatorname{tg} x + \sin(\pi + x) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$;

г) $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = \cos x + \sin x$;

д) $3(\cos x - \sin x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$.

18. а) $\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$;

б) $2\cos^2 x + 3\sin 2x - 8\sin^2 x = 0$;

в) $3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2\cos 2x - 4\sin 2x = 0$;

г) $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 8\cos^2 x = -2$;

д) $1/\cos x = 4\sin x + 6\cos x$.

19. а) $\sin^3 x + 4\cos^3 x = 0$;

б) $\sin^2 x(1 + \operatorname{tg} x) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$;

в) $\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x = 1$;

г) $(8a^2 + 1)\sin^3 x - (4a^2 + 1)\sin x + 2a\cos^3 x = 0$.

20. Найдите критические точки функции

а) $y = 3\cos 2x - 5\sin 2x + 4\cos 2$;

б) $y = 8\sin 2x + 6\cos^2 x + 17x + 1$;

в) $y = \cos^3 x - 3\cos x + 3x/8 - 3\sin 3$;

г) $y = 8(\cos 2 - \cos x) - \sin x - 1/\sin x$;

д) $y = 9\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{tg} 2$.

Решите уравнения:

21. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

в) $\sin 5x = \sqrt{3}(1 + \cos 5x)$; г) $\cos x + \sin x = 1$;

д) $\sin x + \cos x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$;

е) $\sin x \operatorname{tg} 5x = \cos x$; ж) $\cos x - \sin x = a$;

з) $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$;

и) $\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x \operatorname{tg}^2 x = 1$.

22. а) $\frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} = -1$; б) $\frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x} = 1$;

в) $2 \operatorname{tg} 3x - 3 \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x$;

г) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 15° + \operatorname{ctg} (x + 25°) = \operatorname{ctg} 15° \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} (x + 25°)$.

23. а) $\sin x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$; б) $1 + \cos x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$;

в) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 4 \sin 2x$;

г) $15 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 130 \sin x = \frac{53}{5} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

д) $\frac{79}{4} \cos x + 6 \sin x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 4 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

е) $2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin^2 x - \operatorname{tg} x$.

24. Равносильны ли уравнения

$1 + \cos 2x + \sin 2x = 0$ и $1 + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0$?

Решите уравнения:

25. а) $\cos 3x = -2 \cos x$; б) $\cos 9x - 2 \cos 6x = 2$;

в) $\cos 4x = \cos^2 3x$.

26. а) $3 \sin \frac{x}{3} = \sin x$; б) $\sin 6x + 2 = 2 \cos 4x$;

в) $\sin \frac{3}{2} x + 3 \sin x = 3 \sin \frac{x}{2}$;

г) $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} x \right) = 2 \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$.

27. $3 \cos x + 3 \sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$.

28. а) $\sin x + \sin \frac{3}{2} x = a \sin \frac{x}{2}$;

б) $a^2 \sin^2 3x = \sin^2 x$, $a > 0$.

29. $a \cos x + b \sin x = c$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

30. При каких значениях p уравнение $\sqrt{p} \cos x - 2 \sin x = \sqrt{2} + \sqrt{2 - p}$ имеет решения?

31. Решите уравнение а) $2 \cos x + 3 \sin x = 2$; б) $\sin x + \cos x = a^2$; в) $\sin 2x + 3 \cos 2x = a$; г) $2 \cos^2 6x - 9 \sin^2 6x + 4 \sin 6x \cos 6x = a + 5$.

32. Найдите критические точки функции

$$f(x) = \sin 3x + \frac{4}{3} \cos 3x - ax.$$

Решите уравнения:

33. а) $\sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$; б) $\sin 4x-\sin 2x=0$;

в) $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos\frac{x}{2}$; г) $\cos 2x-\cos 6x=0$;

д) $\cos(3x-4\pi)=\sin(\pi-x)$;

е) $\sin \pi x^2=\sin\pi(x^2+2x)$.

34. а) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $1+\sin 2x=(\sin 3x-\cos 3x)^2$;

в) $\cos 5x+\cos 7x=\cos(\pi+6x)$;

г) $\cos x-\cos 3x=2\sqrt{3}\sin^2 x$;

д) $\sin x+\sin 3x+4\cos^2 x=0$;

е) $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$;

ж) $\sin x+2\sin 2x=-\sin 3x$;

з) $\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin 3x}=-1$.

35. а) $\sqrt{2}\sin 10x+\sin 2x=\cos 2x$;

б) $\operatorname{ctg} x\sin 2x-\cos 2x=1$;

в) $\operatorname{tg} 2x\cos 3x+\sin 3x+\sqrt{2}\sin 5x=0$;

г) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+$
$+\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$.

36. а) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$;

б) $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$;

в) $\cos 5x-\sin 5x=\sin 7x-\cos 7x$;

г) $\sin 7x+\cos^2 2x=\sin^2 2x+\sin x$;

д) $\cos 2x-\sin 3x-\cos 8x=\sin 10x-\cos 5x$;

е) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$;

ж) $5\sin x+6\sin 2x+5\sin 3x+\sin 4x=0$;

з) $\operatorname{cosec} x-\operatorname{cosec} 2x=\operatorname{cosec} 4x$;

и) $\sin a+\sin(x-a)+\sin(2x+a)=\sin(x+a)+$
$+\sin(2x-a)$.

37. Найдите критические точки функции

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{8}\sin 8.$$

Решите уравнения:

38. а) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0$; б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$.

39. а) $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$;

б) $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$;

в) $\cos 3x \sin 7x = \cos 2x \sin 8x$;

г) $\sin 5x \cos 3x - \sin 6x \cos 2x$;

д) $\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$.

40. а) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$;

б) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;

в) $\sin 7x + \sin 9x = 2\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right]$;

г) $\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{9}{16}$.

41. а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

б) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = -0{,}5$.

42. а) $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + 0{,}375 = 0$;

б) $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \sqrt{2}/4$.

43. а) $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{8}$;

б) $8 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 1 = 0$;

в) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

44. а) $\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$; б) $\sin 3x \cos x = 1{,}5 \operatorname{tg} x$;

в) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 3x = 4$; г) $6 \operatorname{tg} x + \frac{5}{\operatorname{tg} 3x} = \operatorname{tg} 2x$;

д) $\sin x \cos x \sin 3x - \cos 3x \sin^2 x = 6 \operatorname{ctg} x$.

45. а) $2 \sin 3x \sin x + (3\sqrt{2} - 1) \cos 2x = 3$;

б) $2 \cos 4x + 5 \cos 2x - 1 = 2 \sin^2 x$;

в) $2 + \cos 4x = 5 \cos 2x + 8 \sin^6 x$;

г) $\operatorname{tg}^2 x + \cos 4x = 0$; д) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - \cos 4x = 3$.

46. а) $\sin^4 x - 2 \cos^2 x + a^2 = 0$;

б) $\cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x - 3 \sin^4 x = 2 \cos 2x - 2a \cos 4x$;

в) $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{a}{8} \cos 2x$.

47. а) $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$;

б) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$;

в) $1 + \operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}\sin x$;

г) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sin x \cos x)$;

д) $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$;

е) $\sin\frac{1+\sqrt{x}}{2} + \cos\frac{\sqrt{x}}{2} = \sqrt{2}\sin\sqrt{x}$.

48. а) $a\sin x + \operatorname{tg} x + 1 = 1/\cos x$;

б) $\sin 2x - 2\sqrt{2b}(\sin x - \cos x) + 1 - 4b = 0$;

в) $\sin^3 x + \cos^3 x + a\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

49. Найдите критические точки функции

$$f(x) = 8x - 8(\sin x - \cos x) - \cos 2x + 1.$$

Решите уравнения:

50. а) $\sin^2 x + 2\operatorname{tg}^2 x + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{tg} x - \sin x + \frac{11}{12} = 0$;

б) $8\cos x + 6\sin x - \cos 2x - 7 = 0$;

в) $\sin^4 x + \sin^4\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos^4 x = 0{,}5\sin^2 2x$.

51. а) $\left(\cos\frac{x}{4} - 2\sin x\right)\sin x + \left(1 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x\right) \times$
$\times \cos x = 0$; б) $3\sin 3x = \cos 4x - \sin 9x - \cos 10x$.

52. а) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{9}\operatorname{ctg} x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 1$;

б) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}$.

53. а) $\sqrt{2\cos 2x + 2} = \frac{3}{\sqrt{1 + 4\cos 2x}}$;

б) $\sqrt{\sin x} = \sqrt{a\cos x}$.

54. а) $\sqrt{\sin x} + \sqrt[4]{2}\cos x = 0$; б) $\sin x + \sqrt{\cos x} = 0$;

в) $2\cos x = \sqrt{2 + 2\sin 2x}$;

г) $\sqrt{\cos^2 x - \cos^2 3x} = \sin 2x$;

д) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{0{,}5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}$;

е) $\frac{1 - a\sin x}{1 + a\sin x}\sqrt{\frac{1 + 2a\sin x}{1 - 2a\sin x}} = 1$.

55. а) $\sqrt{1+4\sin x\cos x}=\cos x-\sin x$;

б) $\sqrt{\cos 2x-\sin 4x}=\sin x-\cos x$;

в) $\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}}=\sin x+\cos x$;

г) $4\sin 3x+3=\sqrt{2\sin 3x+2}$;

д) $\sqrt{13-18\operatorname{tg}x}=6\operatorname{tg}x-3$;

е) $\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

56. а) $2\sqrt{3\sin x}=\frac{3\operatorname{tg}x}{2\sqrt{\sin x}-1}-\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{\sqrt{3}\cos x+\sin x-2}+\sqrt{\operatorname{ctg}3x+\sin^2 x-\frac{1}{4}}=$

$=\sin\frac{3x}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

57. $\sqrt{\cos x-1/2}+\sqrt{\cos x+1/3}=a,\ a\in R$.

58. а) $\log_5\operatorname{tg}x=(\log_5 4)\log_4(3\sin x)$;

б) $\log_9\sin 2x=\log_3\sqrt{\frac{\sin x}{5}}$.

59. а) $2^{\cos 2x}=3\cdot 2^{\cos^2 x}-4$; б) $\operatorname{ctg}2^x=\operatorname{tg}2^x+2\operatorname{tg}2^{x+1}$;

в) $x^{3\sin 2x+2}=\sqrt{x}$.

Решите системы уравнений:

60. а) $\begin{cases} x-y=6{,}5\pi, \\ 3\cos^2 x-12\cos y=-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=\frac{2}{3}\pi, \\ \frac{\sin x}{\sin y}=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \cos x+\cos y=a, \\ x+y=\pi/4. \end{cases}$

61. а) $\begin{cases} \sin 3x\cos 2y=2^a-\cos 3x\sin 2y, \\ \cos(x-y)=0{,}5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin x\sin y=\frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x\cos y=\frac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2, \\ \cos x\cos y=0{,}5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sin x\cos y=1/4, \\ 3\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y. \end{cases}$

62. а) $\begin{cases} \operatorname{tg}x-2\sin y=-2; \\ 5\operatorname{tg}x+2\sin y=-4, \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \cos y = \frac{a+3}{3}, \\ \sin x \cos y = -\frac{a}{3}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} y = 2a + 2, \\ \operatorname{tg} y + (a^2 + 2a)\cos x = 0. \end{cases}$

63. $\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3-\sqrt{2})\operatorname{tg} 5y = (3\sqrt{2}-1)/2, \\ (3-\sqrt{2})\sin(-2x) + \operatorname{tg}^2 5y = (3\sqrt{2}-1)/2. \end{cases}$

§ 8. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Решите неравенства:

1. а) $\sin 2x > 0$; б) $\sin \frac{x}{2} < 0$; в) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{1}{2}$;
   г) $\sin(2x-1) > -\frac{1}{\sqrt{2}}$; д) $\sin x \leqslant -1$.
2. а) $\cos \frac{x}{3} > 0$; б) $\cos 4x < 0$; в) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{2}$;
   г) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\cos x \geqslant 1$.
3. а) $\operatorname{tg} 2x > 0$; б) $\operatorname{tg} \frac{x}{4} < 0$; в) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 1$;
   г) $\operatorname{tg}(3x-2) < -\sqrt{3}$.
4. $\operatorname{ctg} x < 0$; б) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1$; в) $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) < -2$.
5. а) $|\sin x| > 1/2$; б) $|\cos x| < 1/2$; в) $|\operatorname{tg} x| \leqslant 1$;
   г) $|\operatorname{ctg} x| < \sqrt{3}$.
6. а) $\frac{1}{3} \leqslant \sin x < \frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2} < \cos x \leqslant -\frac{1}{4}$;
   в) $-2 < \operatorname{tg} x < 3$; г) $-4 < \operatorname{ctg} x \leqslant 1{,}5$.
7. $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 > 0$.
8. $\cos 2x + 5\cos x + 3 \geqslant 0$.
9. $\operatorname{tg}^2 x + (2-\sqrt{3})\operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} < 0$.
10. $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x \geqslant 0$.

11. $2(\sqrt{2}-1)\sin x - 2\cos 2x + 2 - \sqrt{2} < 0$.

12. $\cos \pi x + \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

13. $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < \frac{3}{8}$.

14. $\cos x \cos 2x \cos 3x \leqslant 0$. 15. $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} > \frac{1}{2}$.

16. $\sin^6 x + \cos^6 x > \frac{5}{8}$. 17. $8\sin^6 x - \cos^6 x > 0$.

18. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x < -1$. 19. $3\sin 2x - 1 > \sin x + \cos x$.

20. $\sin 2x > \sqrt{2}\sin^2 x + (2-\sqrt{2})\cos^2 x$, $0 < x < 2\pi$.

21. $|\sin x| > \cos^2 x$. 22. $\sqrt{5 - 2\sin x} \geqslant 6\sin x - 1$.

23. $1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x$.

24. $9^{1+\sin^2 \pi x} + 30 \cdot 9^{\cos^2 \pi x} \leqslant 117$.

Найдите область определения следующих функций:

25. $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$. 26. $y = \sqrt{\cos x^2}$.

27. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$. 28. $y = \arccos(2\sin x)$.

29. $y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos 2^x$.

30. Докажите, что функция $y = \sin^2 x$ монотонно возрастает на интервале $x \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$.

31. Докажите, что функция $y = \cos^3 x$ монотонно убывает на интервале $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right[$.

32. Докажите, что если $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \frac{x_2}{x_1}$.

Найдите критические точки функций:

33. $f(x) = 2\sin a \cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{\sqrt{4a - a^2}}$.

34. $f(x) = \left(1 - \frac{\cos a}{4}\right)\sin 2x + \frac{1}{8}\sin(\pi + 4x) + x\left(\frac{\cos a - 3}{2}\right) + \sqrt{2a - a^2 - 3}$.

35. $f(x) = \frac{1}{3}\sin a \operatorname{tg}^3 x + (\sin a - 1)\operatorname{tg} x + \frac{1}{\sqrt{8-a}}\sqrt{a-2}$.

ГЛАВА III

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1. ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

1. Поезд вышел со станции A по направлению к станции B. Пройдя 450 км, что составляло 75 % всего пути AB, поезд остановился из-за снежного заноса. Через полчаса путь был расчищен и машинист, увеличив скорость поезда на 15 км/ч, привел его на станцию B без опоздания. Найдите начальную скорость поезда.

2. Моторная лодка прошла вниз по течению реки 14 км, а затем 9 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Найдите скорость течения реки, если скорость моторной лодки в стоячей воде равна 5 км/ч.

3. По графику поезд должен проходить перегон AB в 20 км с постоянной скоростью. С заданной скоростью поезд прошел полпути и остановился на 3 мин; чтобы вовремя прийти в пункт B, ему пришлось остальные полпути идти на 10 км/ч быстрее. Второй раз поезд простоял на полпути уже 5 мин. С какой скоростью он должен был идти оставшуюся часть пути, чтобы прибыть в пункт B по расписанию?

4. Велосипедист выехал из пункта A в B и ехал с постоянной скоростью 20 км/ч. Когда он проехал $8\frac{1}{3}$ км, его догнал автомобиль, вышедший из A на 15 мин позднее и шедший тоже с постоянной скоростью. После того как велосипедист проехал еще 25 км, он встретил автомобиль, уже возвращавшийся из B, где он простоял полчаса. Найдите расстояние между A и B.

5 Лодка спускается вниз по течению реки из пункта A в пункт B, находящийся в 10 км от A, а затем возвращается в A. Если собственная скорость лодки 3 км/ч, то путь из A в B занимает на 2 ч 30 мин меньше, чем из B в A. Какой должна быть собственная скорость лодки, чтобы поездка из A в B заняла 2 ч?

6. Расстояние от A до B 30 км. Из A выехал автобус с постоянной скоростью. Через 10 мин из A вылетел вертолет, который летел вдоль шоссе к B. Через 5 мин после вылета он нагнал автобус и продолжал лететь до B. Не приземляясь, вертолет в B повернул

назад и снова встретил автобус уже через 20 мин после своего вылета из A. Определите скорости автобуса и вертолета.

7. Из города M в город N в 5 ч утра вышел товарный поезд. Через полтора часа вслед за ним вышел пассажирский, скорость которого на 5 км/ч больше скорости товарного поезда. В 21 ч 30 мин того же дня расстояние между поездами составляло 21 км. Найдите скорость товарного поезда.

8. Если пароход и катер плывут по течению, то расстояние от A до B пароход проходит в полтора раза быстрее катера, при этом катер каждый час отстает от парохода на 8 км. Если же они плывут против течения, то пароход проходит путь от B до A в два раза быстрее катера. Найдите скорости парохода и катера в стоячей воде.

9. Пункт C расположен в 12 км от B вниз по течению реки. Рыбак отправился на лодке в пункт C из пункта A, расположенного выше пункта B. Через 4 ч он прибыл в C, а на обратный путь затратил 6 ч. Поставив на лодку мотор и тем самым увеличив скорость лодки относительно воды втрое, рыбак дошел от A до B за 45 мин. Определите скорость течения реки, считая ее постоянной.

10. Два человека вышли одновременно: один из пункта A в пункт B, другой из B в A. Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, сразу же отправлялся обратно. Первый раз они встретились в 12 км от B, второй раз — через 6 ч после первой встречи в 6 км от A. Найдите расстояние между пунктами A и B и скорости обоих людей.

11. Два самолета вылетают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии a км от середины AB. Если бы первый самолет вылетел на b ч позже второго, то они встретились бы на середине AB. Если же второй самолет вылетает на b ч позже первого, то они встречаются на четверти пути от B. Найдите расстояние AB и скорости самолетов.

12. Два туриста вышли одновременно из пункта A в B, причем первый турист каждый километр пути проходит на 5 мин быстрее второго. Первый, пройдя пятую часть пути, вернулся в A и, пробыв там 10 мин, снова пошел в B. При этом в B оба туриста пришли одно-

временно. Каково расстояние от A до B, если второй турист прошел его за 2,5 ч?

13. Два велосипедиста выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Первый из них едет со скоростью 15 км/ч, а второй — 12 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехал третий велосипедист, который через некоторое время догнал второго, а еще через 1 ч 30 мин догнал и первого. Найдите скорость третьего велосипедиста.

14. Меньшая дуга AB окружности имеет длину l см. Движущиеся по окружности точки P_1 и P_2 в момент $t=0$ находятся соответственно в точках A и B. Если точки P_1 и P_2 будут двигаться навстречу друг другу по меньшей дуге, то они встретятся через t_1 с, а если по большей, то через t_2 с. Точка P_1 обегает всю окружность за то время, в течение которого P_2 проходит S см. Найдите длину окружности и скорости точек P_1 и P_2 (движение точек по окружности равномерное).

15. Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, встречаются через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то они встречались бы через каждые 8 мин. Если при движении в противоположных направлениях в некоторый момент времени расстояние по окружности между телами равно 40 м, то через 24 с оно будет 26 м (в течение этих 24 с тела не встретились). Найдите скорости тел и длину окружности.

16. Расстояние между пунктами A и B, расположенными на прямолинейном шоссе, равно 15 км. Из A выезжает велосипедист с постоянной скоростью 8 км/ч, а из B в том же направлении — мотоциклист, который движется с постоянным ускорением 2 км/ч^2. Через какое время после начала движения расстояние между велосипедистом и мотоциклистом будет равно 750 м, если они начнут движение одновременно? Начальная скорость мотоциклиста равна нулю.

17. Студенты взяли на лодочной станции лодку напрокат. Сначала они спустились вниз по течению реки на 20 км, затем повернули обратно и вернулись на лодочную станцию, затратив на всю прогулку 7 ч. На обратном пути на расстоянии 12 км от лодочной станции они встретили плот, проплывавший мимо лодочной станции в тот момент, когда они направились на про-

гулку. Определите, с какой скоростью двигалась лодка вниз по течению реки и какова скорость течения реки.

18. Из порта одновременно вышли два парохода: один — на север, другой — на восток. Через 2 ч расстояние между ними оказалось равным 60 км. Найдите скорость каждого парохода, зная, что скорость одного из них на 6 км/ч больше скорости другого парохода.

19. Пункты A, B, C удалены от пункта M соответственно на 60, 55 и 56 км. Одновременно из этих пунктов в пункт M вышли три пешехода: первый — из A, второй — из B, третий — из C. Первый прошел весь путь с постоянной скоростью и прибыл в M на 2 ч раньше второго и третьего, прибывших одновременно. Второй пешеход, пройдя 40 км с той же скоростью, что и первый, сделал остановку на 1 ч. Остаток пути он прошел со скоростью, которая меньше скорости третьего пешехода на столько же, на сколько скорость третьего меньше скорости первого. Третий пешеход весь путь прошел с постоянной скоростью. Определите скорость первого и третьего пешеходов.

20. Дорога проходит через пункты A и B. Одновременно и в одном направлении выехали: из A — мотоциклист (в направлении к B), из B — велосипедист. Мотоциклист догнал велосипедиста на расстоянии a км от B. Если бы мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из A в B, то в момент прибытия мотоциклиста в B велосипедист отставал бы от него на b км. Определите расстояние между пунктами A и B (скорости мотоциклиста и велосипедиста постоянны).

21. Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два пешехода. Когда пешеход, вышедший из A, прошел $^2/_3$ пути, второй пешеход находился в 2 км от середины пути. Найдите расстояние между A и B, если известно, что, когда пешеход, вышедший из B, прошел $^3/_{16}$ пути, первый пешеход находился от середины пути в 3 км. Скорости пешеходов постоянны.

22. Два пешехода вышли одновременно из пункта A. Первый из них встретился с туристом, идущим в A, через 20 мин после выхода из A, а второй встретил туриста на 5 мин позже первого. Через 10 мин

после второй встречи турист пришел в A. Скорости пешеходов и туриста постоянны. Найдите отношение скоростей пешеходов.

23. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист. Через 2 ч из A в B выехал автомобиль, который прибыл в B одновременно с мотоциклистом. Если бы автомобиль и мотоциклист одновременно выехали из A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 ч 20 мин после выезда. Сколько времени провел в пути из A в B мотоциклист?

24. Дорога проходит через пункты A и B. Велосипедист выехал из A по направлению к B. Одновременно с ним из пункта B вышли с равными скоростями два пешехода: первый — в пункт A, второй — в противоположном направлении. Велосипедист проехал от A до B за 0,5 ч и, продолжая движение, догнал второго пешехода. Это произошло через 1,2 ч после встречи велосипедиста с первым пешеходом. Определите время движения велосипедиста от начала движения до встречи с первым пешеходом (скорости велосипедиста и пешеходов постоянны).

25. Города A и B стоят на берегу реки. Буксир тратит на прохождение от A до B и обратно 13 ч, а катер, собственная скорость которого в два раза больше собственной скорости буксира, тратит на этот же путь 6 ч. Во сколько раз собственная скорость буксира больше скорости реки?

26. Из пункта A отправилась моторная лодка вверх по Волге, а из пункта B одновременно вышел плот по течению. Через a ч они встретились и далее двигались без остановок. Дойдя до B, лодка, не задерживаясь, повернула обратно и догнала плот в пункте A. Предполагается, что собственная скорость лодки была все время неизменной. Сколько времени находились в пути плот и лодка?

27. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 ч 20 мин. За какое время пройдет все расстояние каждый из них, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 5 ч позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

28. Два велосипедиста выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 1,6 ч расстояние между ними составило 0,2 первоначального.

Сколько часов требуется каждому из велосипедистов на прохождение пути AB, если первый затрачивает на этот путь на 3 ч меньше второго?

29. Три лыжника проходят дистанцию, двигаясь равномерно. Через m мин после старта третьего лыжника ему остается пройти часть дистанции, которую первый лыжник может пройти за n мин, второй — за p мин. Определите, за сколько минут может пройти всю дистанцию каждый из лыжников, если скорость третьего лыжника равна полусумме скоростей первого и второго.

30. Два автомобиля выехали одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 16 ч после встречи автомобиль, ехавший из A, прибыл в B, а через 25 ч после встречи автомобиль, ехавший из B, прибыл в A. Сколько часов был в пути каждый автомобиль?

31. Из пункта A в B одновременно отправляются пешеход и велосипедист. Доехав до B, велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через 1 ч после начала движения. После встречи пешеход продолжает идти в B, а велосипедист поворачивает и тоже едет в B. Доехав до B, велосипедист снова поворачивает обратно и встречает пешехода через 40 мин после первой встречи. Определите, за какое время пешеход пройдет расстояние от A до B.

32. Из пунктов A и B одновременно выезжают два автомобиля и встречаются в 12 ч дня. Если скорость первого удвоить, а скорость второго оставить первоначальной, то встреча произойдет на 56 мин раньше. Если же скорость второго удвоить, а скорость первого оставить первоначальной, то они встретятся на 65 мин раньше. Определите время встречи в том случае, когда скорость обоих автомобилей была бы удвоенной.

§ 2. ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ, СМЕСИ, ЧИСЛА, РАБОТУ

1. Три землекопа, работая одновременно, за четыре дня выкопали 216 м траншеи. За один день третий землекоп выкапывает больше второго на столько же метров, на сколько второй выкапывает за день больше первого. За пять дней третий землекоп выкапывает столько же метров, сколько первый за семь

дней. Сколько метров в день выкапывает первый землекоп?

2. На угольной шахте сначала работали два участка, а через некоторое время вступил в строй третий участок, в результате чего производительность шахты увеличилась в полтора раза. Сколько процентов составляет производительность второго участка от производительности первого, если известно, что за 4 месяца первый и третий участки выдают угля столько же, сколько второй за год?

3. Трое рабочих выполнили работу за 10 дней, причем третий из них работал только первые три дня. За сколько дней выполнил бы работу каждый рабочий, если известно, что за первые три дня они вместе выполнили 37 % всей работы, а за 5 дней первый рабочий сделал столько же, сколько второй за 4 дня?

4. Двое рабочих, работая одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый работал вдвое быстрее, а второй — вдвое медленнее, то работа заняла бы у них 4 дня. За сколько времени выполнил бы всю работу один первый рабочий?

5. Два скрепера разной мощности, работая вместе, могут выполнить работу за 6 ч. Если бы первый проработал 4 ч, а затем один второй 6 ч, то они выполнили бы 80 % всей работы. За сколько часов каждый скрепер, работая отдельно, может выполнить всю работу?

6. Трое рабочих должны сделать 80 одинаковых деталей. Известно, что вместе они делают за час 20 деталей. К работе приступил сначала первый рабочий. Он сделал 20 деталей, затратив на это более 3 ч. Оставшуюся часть работы выполнили вместе второй и третий рабочие. На всю работу ушло 8 ч. Сколько часов потребовалось бы первому рабочему на всю работу, если бы с начала и до конца он делал ее один?

7. Три обыкновенных и два тракторных плуга обрабатывают вместе поле за 6 дней. Три тракторных плуга выполнили бы ту же работу на 5 дней быстрее, чем девять обыкновенных. Во сколько раз производительность тракторного плуга больше производительности обыкновенного?

8. Каждому из трех рабочих для выполнения некоторой работы требуется определенное время, причем третий рабочий выполняет ее на 1 ч быстрее первого. Работая все вместе, они выполняют работу за 1 ч. Если же первый рабочий проработает 1 ч, то второму для завершения всей работы потребуется 4 ч. За сколько времени может выполнить всю работу каждый рабочий?

9. Два экскаватора производят работу. Если эту работу будет выполнять один первый экскаватор, то он может закончить ее на 8 ч позднее, чем оба вместе. Если эту работу будет выполнять один второй экскаватор, то он закончит ее на 4,5 ч позже, чем оба вместе. В какое время может выполнить работу каждый из экскаваторов в отдельности?

10. За t мин один автомат изготавливает на d деталей больше другого. Если бы на каждом из них удалось сократить время выпуска одной детали на 2 мин, то первый автомат выпускал бы за t мин на $2d$ деталей больше второго. Сколько деталей изготавливает каждый автомат за t мин?

11. Два куска одинаковой ткани стоят вместе 91 р. Когда из первого куска продали столько, сколько было первоначально во втором, а из второго — половину того, что было первоначально в первом, остаток первого куска оказался на 10 м больше остатка второго куска. Сколько метров ткани было в каждом куске, если 1 м ткани стоит 1 р. 40 к.?

12. В ателье поступило по одному куску черной, зеленой и синей ткани. Хотя зеленой ткани было на 9 м меньше, чем черной, и на 6 м больше, чем синей, стоимость кусков была одинаковой. Известно также, что стоимость 4,5 м черной ткани равна общей стоимости 3 м зеленой и 0,5 м синей ткани. Сколько метров было в каждом куске?

13. Бак емкостью 2400 м^3 наполняется топливом. При опорожнении этого же бака производительность насоса на 10 м^3/мин выше, чем производительность насоса при наполнении. В результате время опорожнения бака на 8 мин меньше времени заполнения. Определите производительность насоса при наполнении бака.

14. Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала первый кран был открыт $^1/_3$ того времени,

за которое наполняет бассейн один второй кран. Затем, наоборот, один второй кран был открыт $^1/_2$ того времени, за которое наполняет бассейн один первый кран. После этого оказалось наполненным $^5/_6$ бассейна. Оба крана, открытые вместе, наполняют бассейн за 2,4 ч. За какое время наполнит бассейн каждый кран в отдельности?

15. Бак объемом 425 м^3 наполнился водой из двух кранов, причем первый кран был открыт на 5 ч дольше второго. Если бы первый кран был открыт столько времени, сколько на самом деле был открыт второй, а второй был бы открыт столько времени, сколько был открыт первый, то из первого крана вытекло бы воды вдвое меньше, чем из второго; если открыть оба крана одновременно, то бак наполнится через 17 ч. Определите, сколько времени был открыт второй кран.

16. Двум токарям и ученику поручили выполнение срочной работы. Первый токарь может один выполнить всю работу за время на 3 ч большее, чем время, за которое второй токарь и ученик, работая одновременно, выполняют ту же работу. Второй токарь, работая один, выполняет всю работу за то же время, за которое ее выполняют первый токарь и ученик, работая одновременно. Время, затрачиваемое вторым токарем на самостоятельное выполнение всей работы, на 8 ч меньше удвоенного времени, затрачиваемого первым токарем на самостоятельное выполнение всей работы. За какое время будет выполнена вся работа двумя токарями и учеником, работающими одновременно?

17. Трое рабочих разной квалификации выполнили некоторую работу, причем первый работал 6 ч, второй — 4 ч и третий — 7 ч. Если бы первый рабочий работал 4 ч, второй — 2 ч и третий — 5 ч, то было бы выполнено лишь $^2/_3$ всей работы. За сколько часов рабочие закончили бы работу, если бы они работали все вместе одно и то же время?

18. В бассейн проведены четыре трубы. Когда открыты первая, вторая и третья трубы, бассейн наполняется за 12 мин; когда открыты вторая, третья и четвертая трубы — за 15 мин; когда открыты только первая и четвертая трубы — за 20 мин. За какое

время наполнится бассейн, если открыть все четыре трубы?

19. Одна железная руда содержит 72 % железа, другая — 58 %. Некоторое количество первой руды смешивают с некоторым количеством второй и получают руду, содержащую 62 % железа. Если бы для смеси взяли каждой руды на 15 кг больше, чем было взято, то получилась бы руда, содержащая p % железа. Сколько килограммов первой и второй руд было взято для составления первой смеси?

20. В первый сосуд емкостью 6 л налито 4 л 70 %-ного раствора серной кислоты; во второй сосуд такой же емкости налито 3 л 90 %-ного раствора серной кислоты (имеется в виду объемное процентное содержание). Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в первом сосуде получился q %-ный раствор серной кислоты?

21. После двух последовательных повышений зарплата достигала $^{15}/_{8}$ по сравнению с первоначальной. На сколько процентов повысилась зарплата в первый раз, если второе повышение было вдвое больше (в процентном отношении) первого?

22. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $^{3}/_{5}$ некоторого количества денег положили в первый банк, а остальную часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 590 денежным единицам, к концу следующего года — 701 денежной единице. Было подсчитано, что если бы первоначально $^{3}/_{5}$ исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 610 денежным единицам. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

23. Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили литр глицерина, а взамен долили литр воды. После перемешивания снова отлили литр смеси и долили литр воды. Наконец, опять после перемешивания отлили литр смеси и долили литр воды. В результате этих операций количество воды в сосуде оказалось в семь раз большим по объему оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина

и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

24. Из колбы, содержащей раствор соли, отлили в пробирку $^1/_{10}$ раствора. Затем из пробирки часть воды нагреванием испарили, в результате чего процентное содержание соли в пробирке увеличилось в k раз. Каково первоначальное процентное содержание соли было в колбе, если известно, что после переливания в нее содержимого пробирки процентное содержание соли в колбе увеличилось на a %?

25. Имеются три куска сплава меди с оловом. Массы этих кусков относятся как 3 : 4 : 5. Процентное содержание меди во втором куске в a раз больше, а в первом куске в a раз меньше, чем в третьем куске. После того как все три сплава сплавили вместе, получили новый сплав меди и олова, в котором процентное содержание меди изменилось на p % по сравнению с процентным содержанием меди в третьем куске. Каково было первоначальное процентное содержание меди в этих сплавах?

26. Разность цифр двузначного числа равна 2, а сумма квадратов этих же цифр равна 52. Найдите это число.

27. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке — 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найдите это число.

28. Найдите трехзначное число, если известно, что сумма его цифр равна 17, а сумма квадратов его цифр — 109. Если из этого числа вычесть 495, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

29. Сумма кубов цифр двузначного числа равна 243, а произведение суммы его цифр на произведение цифр этого числа равно 162. Найдите это двузначное число.

§ 3. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ. ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

1. В четырехзначном числе сумма цифр сотен, десятков и единиц равна 14, сумма цифр тысяч и единиц равна 9, цифра сотен больше цифры десятков на 4.

Из всех чисел, удовлетворяющих указанным условиям, найдите такое, у которого сумма произведения цифры тысяч на цифру единиц и произведения цифры десятков на цифру сотен принимает наибольшее значение.

2. Лодка спускается по течению реки на расстояние 10 км, а затем поднимается против течения на расстояние 6 км. Скорость течения реки равна 1 км/ч. В каких пределах должна лежать собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3 до 4 ч?

3. Купили несколько одинаковых книг и альбомов. За книги заплатили 10 р. 56 к., за альбомы — 56 к. Книг купили на 6 шт. больше, чем альбомов. Сколько купили книг, если цена одной книги больше чем на 1 р. превосходит цену одного альбома?

4. Из точки A по прямой начали двигаться одновременно в одном направлении две точки: первая — равномерно ускоренно с начальной скоростью 3 м/с и ускорением 2 м/с^2, вторая — равномерно. В каких пределах может изменяться скорость второй точки, чтобы она сначала обогнала первую точку, но чтобы затем первая точка догнала вторую на расстоянии, не большем 10 м от A?

5. Школьник перекленвает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если школьнику подарить еще такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

6. Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 170 до 195 р. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 р. больше. Сколько стоил магнитофон?

7. Несколько человек должны были принять участие в экскурсии. Однако в последний момент два человека от участия в ней отказались, поэтому каждому из оставшихся экскурсантов пришлось уплатить за участие в экскурсии на 3 р. больше, чем планировалось первоначально (все участники должны были заплатить поровну). Сколько должен был заплатить каждый экскурсант первоначально, если стоимость экскурсии больше 70 р., но не более 75 р.?

8. Для перевозки груза из одного места в другое затребовали некоторое количество одинаковых машин. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно были затребованы 4 такие же машины. Вес перевезенного груза был больше 55 т, но не превосходил 64 т. Сколько тонн груза было перевезено на каждом грузовике?

9. Пункты A и B расположены на одной реке так, что плот, плывущий из A в B со скоростью течения реки, проходит путь от A до B за 24 ч. Весь путь от A до B и обратно катер проходит не менее чем за 10 ч. Если бы собственная скорость (скорость в стоячей воде) катера увеличилась на 40 %, то тот же путь (от A до B и обратно) занял бы у катера не более 7 ч. Найдите время, за которое катер проходит путь из B в A, когда его собственная скорость не увеличена.

10. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4, 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем троек было больше, чем пятерок, и меньше, чем четверок. Кроме того, число четверок делилось на 10, а число пятерок было четным. Определите, сколько каких оценок получила группа.

11. Около дома посажены липы и березы, причем общее их количество более 14. Если увеличить вдвое количество лип, а количество берез — на 18, то берез станет больше. Если увеличить вдвое количество берез, не изменяя количества лип, то лип все равно будет больше. Сколько лип и сколько берез было посажено?

12. По двум улицам движутся к перекрестку две машины с постоянными скоростями 40 и 50 км/ч. Улицы пересекаются под углом в 60°. В начальный момент времени машины находятся на расстоянии 5 и 4 км от перекрестка (соответственно). Через какое время расстояние между ними станет наименьшим?

13. В бассейн проведены три трубы. Первая труба наливает 30 м³ воды в час. Вторая труба наливает в час на $3V$ м³ меньше, чем первая ($0<V<10$), а третья труба наливает в час на $10V$ м³ больше первой. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают

0,3 бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся 0,7 бассейна. При каком значении V бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

14. Из пункта A на прогулку вышел пешеход со скоростью v км/ч. После того как пешеход отошел от A на 6 км, из A следом за ним выехал велосипедист, скорость которого была на 9 км/ч больше скорости пешехода. Когда велосипедист догнал пешехода, они повернули назад и вместе возвратились в A со скоростью 4 км/ч. При каком v время прогулки пешехода будет наименьшим?

15. Сосуд емкостью 5 л содержит 2 л p %-ного (по объему) раствора соли. Сколько литров 20 %-ного раствора такой же соли надо налить в сосуд, чтобы процентное содержание соли в сосуде стало наибольшим?

16. Имеется три сплава. Первый содержит 45 % олова и 55 % свинца, второй — 10 % висмута, 40 % олова и 50 % свинца, третий — 30 % висмута и 70 % свинца. Из них необходимо составить новый сплав, содержащий 15 % висмута. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание свинца может быть в этом новом сплаве?

17. Тело начинает двигаться прямолинейно в момент времени $t=0$ с начальной скоростью, равной 3 м/с. Через 1 с после начала движения скорость тела была равна 4 м/с. Найдите ускорение тела в конце первой секунды его движения и величину пути, пройденного телом за первые 4 с движения, если скорость тела изменяется по закону $v(t)=(at^2+2t+b)$.

ГЛАВА IV

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА

Найдите первообразные функций:

1. а) $y=2$; б) $y=-3x+1$; в) $y=4(2x-1)$.
2. а) $y=-x^2$; б) $y=x^2-4x+3$;
   в) $y=18(3x+2)^2$.

3. а) $y = x - 3x^3$; б) $y = \frac{1}{2}x + x^5$; в) $y = x^2 - x^4$;
г) $y = (3x - 4)^{100}$; д) $y = (1 - 5x)^7$.

4. а) $y = \frac{1}{x^2}$; б) $y = \frac{1}{x^3} - x$; в) $y = 4x + \frac{1}{(2x-1)^2}$;
г) $y = \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1+x)^3}$.

5. а) $y = \frac{1}{4\sqrt[3]{x}}$; б) $y = \sqrt[3]{x} - 1$; в) $y = \sqrt[4]{x^3} + x$;
г) $y = \sqrt[7]{x} - \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}$; д) $y = \sqrt{x+2}$;
е) $y = \sqrt{5 - 4x}$.

6. а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{1}{2x}$; в) $y = \frac{1}{1-x}$; г) $y = \frac{3}{4x-1}$.

7. а) $y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$; б) $y = \frac{1}{x(x+1)}$;
в) $y = \frac{1}{x^2+5x+4}$; г) $y = \frac{2x+3}{x^2+3x}$.

8. а) $y = \frac{1}{1+x^2}$; б) $y = \frac{2}{x^2+4}$;
в) $y = \frac{4x^2+1}{x^2(1+x^2)}$; г) $y = \frac{(x+1)^2}{x(1+x^2)}$.

9. а) $y = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y = -\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$;
в) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{1-x^2}$.

10. а) $y = 2^x$; б) $y = 3^{-x}$; в) $y = 2e^{4x} + x$; г) $y = e^{-x}$;
д) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; е) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

11. а) $y = 2\sin x$; б) $y = 3\sin\frac{x}{2}$; в) $y = \sin(x - \pi/3)$;
г) $y = -5\sin(10x + \pi/8)$.

12. а) $y = 4\cos(-x)$; б) $y = -2\cos\frac{x}{5}$;
в) $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = 2\cos(7x - 1)$.

13. а) $y = \sin^2 x$; б) $y = -2\cos^2 2x$;
в) $y = 2\cos x\cos 5x$; г) $y = 2\sin 4x\sin 7x$;
д) $y = 2\sin 8x\cos 3x$; е) $y = 2\sin x\cos 11x$.

14. а) $y = \frac{3}{\cos^2 4x}$; б) $y = \frac{2}{\sin^2\frac{x}{2}}$;
в) $y = \operatorname{tg}^2 x$; г) $y = \operatorname{ctg}^2 x$.

15. Найдите первообразную функции $f(x)$, график которой проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$, если а) $f(x) = 3x^2 - 2$, $M(2; 4)$; б) $f(x) = 1 + \cos x + \cos 2x$; $M(0; 1)$; в) $f(x) = 3\cos x - 2\sin x$, $M(\pi/2; 1)$; г) $f(x) = e^{x/2}$, $M(0; 3)$.

16. Найдите производную функции а) $F(x) = \int \arcsin^2 x \, dx$; б) $F(x) = \int_1^x (\sin^6 t + \sqrt{t^4 + 1}) \, dt$.

17. Найдите критические точки функции

а) $f(x) = \int_1^x [t(t+1)(t+2)(t+3) - 24] \, dt$;

б) $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x}{2} + \int_1^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t - t^{\frac{1}{2}}\right) dt$;

в) $f(x) = \int_2^x (\sin^2 t + \sin^2 2t + \sin^2 3t - 1{,}5) \, dt$;

г) $f(x) = \int_0^x (\sin^2 2t - 2\cos^2 2t + a) \, dt$;

д) $f(x) = \int_0^x (\sin 3t - 3\sin t + 0{,}5) \, dt$.

18. Вычислите интеграл

а) $\int_3^{-18} \sqrt[3]{2 - \frac{x}{3}} \, dx$; б) $\int_{-1}^{1} x(x^2 - 1)^5 \, dx$;

в) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{2x \, dx}{x^2 - 1}$; г) $\int_{-2}^{0} (\arcsin(x+1) + \arccos(x+1)) \, dx$;

д) $\int_{-1}^{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 + 1} + \operatorname{arcctg} \frac{x}{x^2 + 1}\right) dx$.

19. Найдите множество положительных значений a, удовлетворяющих уравнению $\int_0^a (3x^2 + 4x - 5) \, dx = a^3 - 2$.

20. Найдите все значения a, при которых выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt{a}} \int_1^a \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx < 4$.

21. Найдите все значения α, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$ и удовлетворяющие уравнению $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \sin x\,dx = \sin 2\alpha$.

22. Решите уравнение

$$\int\limits_{-1}^{x}\left(8t^2+\frac{28}{3}t+4\right)dt=\frac{1{,}5x+1}{\log_{x+1}\sqrt{x+1}}.$$

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

1. а) $y=x$, $x=1$, $y=0$; б) $y=2x$, $y=4x$, $x=2$;
   в) $y=2x$, $y=4x$, $y=3$;
   г) $3x-4y+11=0$, $4x+3y-27=0$,
   $x+7y-13=0$.
2. а) $y=x^2$, $x=-4$, $y=0$; б) $y=x^2$, $y=9$, $x=0$;
   в) $y=x^2+1$, $x=-3$, $x=6$, $y=0$;
   г) $y=-3x^2-2$, $x=1$, $x=2$, $y=-1$;
   д) $y=4x-x^2$, $y=0$; е) $y=x^2-5x+4$, $y=0$.
3. а) $y=x^2-2x+3$, $x+y=5$;
   б) $y=x-5-3x^2$, $y=7x-5$;
   в) $y=x^2-6x+5$, $x=11-y$; г) $y=x^2$, $|y|=x$;
   д) $y^2=1-x$, $y=2x-1$, $x=0$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+7x-12$, касательной к этой параболе, проходящей через ее вершину, и осями координат.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=0{,}5x^2-2x+2$ и касательными к ней, проведенными в точках $A(1;\ 1/2)$ и $B(4;\ 2)$.

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой $y=-9x-59$ и параболой $y=3x^2+ax+1$, если известно, что касательная к параболе в точке $x=-2$ составляет с осью Ox угол величиной $\operatorname{arctg} 6$.

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=ax^2+12x-14$ и прямой $y=9x-32$, если известно, что касательная, проведенная к параболе в точке $x=3$, составляет с осью Ox угол величиной $\pi-\operatorname{arctg} 6$.

8. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = 3x^3 + 2x$ и прямыми $x = a$, $y = 0$, равна единице. Найдите a.

9. Найдите значения c, при которых площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 8x^2 - x^5$, прямыми $x = 1$, $x = c$ и осью абсцисс, равна $10\frac{2}{3}$.

Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

10. а) $y = 5/x$, $y = 4$, $x = 7$;
    б) $y = 1/(x-1)$, $y = 5 - 2x$; в) $xy = 5$, $x + y = 6$;
    г) $x = |y - 2|$, $y = 1/(1-x)$.

11. а) $y = 8/x^2$, $y = x$, $x = 4$;
    б) $y = 4/x^2$, $y = -4x$, $x = -2y$;
    в) $y = -1/x^3$, $y = 27$, $16y = -x$.

12. Найдите площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = -4/x$, касательной к этой кривой, проведенной в точке $x = 2$, и прямой $x = 3$.

13. Найдите значения c, при которых площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x^2$, $x = 1$, $y = c$, равна $2\frac{1}{4}$.

Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

14. а) $y = \sqrt{x-1}$, $y = 3 - x$, $y = 0$; б) $y = x^2$, $x = y^2$;
    в) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - 3x}$, $y = 0$;
    г) $y = -x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = 8$.

15. а) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$;
    б) $y = -x^2 + 6x - 2$, $y = x^2 - 2x + 4$;
    в) $y = 2x^2 - x + 1$, $y = (x-7)^2$, $x = 1{,}5$, $y = 0$.

16. а) $y = x^2$, $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 2$;
    б) $3 - y = 4(x+2)$, $y = x^2 - 1{,}5x + 1$;
    в) $y = -2x^2 - 5x - 3$, $y - 1 = 4/(x+1)$;
    г) $y = -16/x$, $y = -x^3$, $y = 1$;
    д) $y = 8/x^2$, $2y = x^2$, $y = -8x$ $(x \geqslant -2)$;
    е) $y = -1/x$, $y = x^2$, $8y = x^2$.

17. а) $y = 3(x-1)/(x-2)$,
    $x = 2(y+1)/(y-1)$, $x = 3$, $x = 5$;
    б) $y = 1 + \frac{1}{3(x-1)}$, $y = 1/(6x)$.

18. При каком значении a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1/x$, $y = 1/(2x-1)$, $x = 2$, $x = a$, равна $\ln \frac{4}{5}$?

Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

19. а) $y = 3^x$, $x = \log_3 4$, $x = \log_3 5$, $y = 0$;

б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$;

в) $y = 2^x$, $x = 1$, $x = 5$, $y = x - 1$;

г) $y = x + 1$, $y = 3^{-x}$, $x = 2$, $x = 4$.

20. а) $y = e^x$, $y = e^3$, $x = 0$; б) $y = e^{-x}$, $y = e^{-4}$, $x = 1$;

в) $y = e^{-x}$, $y = x + 1$, $x = 5$;

г) $y = |x - 1|$, $x = 2$, $y = e^x$.

21. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 9^{-x} + 85$ и кривой $y = k \cdot 3^{-x} + m$, проходящей через точки $C(0; 34)$ и $D(1; 14)$.

22. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 25^x + 16$ и кривой $y = b \cdot 5^x + 4$, у которой касательная в точке $x = 1$ имеет угол наклона к оси Ox, равный $\operatorname{arctg}(40 \ln 5)$.

23. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y - 15 = e^{2x}$ и кривой $y = 7 \int e^x dx$, проходящей через точку $A(0; 10)$.

Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

24. а) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$;

б) $y = \sin 3x$, $x = \pi/12$, $x = \pi/6$, $y = 0$;

в) $y = 2\cos x$, $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$, $y = 0$;

г) $y = \cos 2x$, $x = -\pi/6$, $x = \pi/8$, $y = 0$.

25. а) $y = \sqrt{3}/2$, $x = 1$, $y = \cos x$, $x = 0$, $y = 0$;

б) $y = \sin x$, $y = 0{,}5$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$;

в) $y = \sin x$, $y = 2\sqrt{2}/3$, $x = 0$, $x = \arcsin(2\sqrt{2}/3)$;

г) $y = 2 - |1 - x|$, $y = \sin x$, $x = 0$, $x = 2$.

26. а) Найдите значение k, при котором площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \pi/18$, $x = k$, $y = \sin 6x$ и осью абсцисс, равна $\frac{1}{6}$;

б) при каком значении d площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos 5x$, $y = 0$, $x = \pi/30$ и $x = d$, равна 0,2?

Вычислите интегралы:

27. а) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$; б) $\int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

28. $\int_1^2 \ln x\,dx$. 29. $\int_0^1 \arcsin x\,dx$.

ГЛАВА V

ПРОГРЕССИИ И ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. ПРОГРЕССИИ

1. Первый член арифметической прогрессии равен 1, а разность этой прогрессии равна 4. Является ли число 10091 членом этой прогрессии?

2. Сколько имеется двузначных натуральных чисел, кратных 7?

3. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток, равный 4.

4. Найдите арифметическую прогрессию, если сумма всех ее членов без первого равна — 36, сумма всех ее членов без последнего равна нулю, а разность десятого и шестого членов равна — 16.

5. Сумма четырех первых членов арифметической прогрессии равна 56. Сумма четырех последних равна 112. Найдите прогрессию, если первый ее член равен 11.

6. Сумма всех членов арифметической прогрессии без первого члена равна 99, а без шестого равна 89. Найдите прогрессию, если сумма первого и пятого членов равна 10.

7. Сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма равнялась 91, если ее третий член равен 9, а разность седьмого и второго членов равна 20?

8. Все члены арифметической прогрессии — натуральные числа. Сумма ее девяти последовательных членов, начиная с первого, больше 200, но меньше 220. Найдите прогрессию, если ее второй член равен 12.

9. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 30, а сумма квадратов первого и второго членов этой же прогрессии равна 116. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что ее пятый член делится нацело на 13.

10. Найдите возрастающую арифметическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма квадратов их равна 275.

11. Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии равно 406. При делении девятого члена этой прогрессии на ее четвертый член в частном получается 2, а в остатке — 6. Найдите первый член и разность прогрессии.

12. Сумма трех чисел равна 0,6(1), а сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Определите эти числа.

13. Сумма семи первых последовательных членов арифметической прогрессии равна нулю, а сумма их квадратов равна a^2. Найдите эту прогрессию.

14. Произведение второго и двенадцатого членов арифметической прогрессии равно 1, а произведение четвертого и десятого членов этой же прогрессии равно b. Найдите седьмой член этой прогрессии.

15. Сумма квадратов пятого и одиннадцатого членов арифметической прогрессии равна 3, а произведение второго и четырнадцатого членов этой же прогрессии равно k. Найдите произведение первого и пятнадцатого членов прогрессии.

16. Сумма квадратов четвертого и десятого членов арифметической прогрессии равна b, а сумма квадратов пятого и девятого членов этой же прогрессии равна 1. Определите произведение второго и двенадцатого членов этой прогрессии.

17. В арифметической прогрессии $S_p=q$; $S_q=p$ (S_n есть сумма n первых членов прогрессии). Найдите S_{p+q}.

18. Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна половине суммы следующих n членов этой прогрессии. Найдите отношение суммы первых $3n$ членов прогрессии к сумме ее первых n членов.

19. Четыре целых различных числа составляют арифметическую прогрессию. Одно из этих чисел равно сумме квадратов остальных трех чисел. Найдите эти числа.

20. На дороге на расстоянии 10 м друг от друга лежит некоторое количество столбов. Начав с одного крайнего столба, рабочий перенес все столбы по одному к другому крайнему столбу, причем для этого ему в общей сложности пришлось пройти 1,44 км. Сколько столбов лежало на дороге?

21. Дано p арифметических прогрессий, каждая из которых содержит n членов. Их первые члены соответственно равны 1, 2, 3, ..., p, а разности равны 1, 3, 5, ..., $2p-1$. Найдите сумму членов всех прогрессий.

22. В арифметической прогрессии шестой член равен 3, а разность прогрессии больше $1/2$. При каком значении разности прогрессии произведение первого, четвертого и пятого ее членов будет наибольшим?

23. Определите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, у которой сумма первого и третьего членов равна 40, а сумма второго и четвертого равна 80.

24. Определите сумму первых трех членов геометрической прогрессии, у которой разность между вторым и первым членами равна 6, а разность между четвертым и третьим равна 54.

25. В геометрической прогрессии сумма первого и четвертого членов равна 18, а сумма второго и третьего равна 12. Найдите разность между третьим и вторым членами этой прогрессии.

26. Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 20, а сумма первых трех ее членов равна 26. Найдите прогрессию.

27. В геометрической прогрессии сумма первых 18 членов больше суммы первых 10 членов на A, а сумма первых семи членов этой же прогрессии, сложенная с числом B, равна сумме первых пятнадцати членов этой же прогрессии. Найдите знаменатель прогрессии.

28. В геометрической прогрессии сумма первых 109 членов больше суммы первых 100 членов этой же прогрессии на 12. Найдите сумму первых девяти членов этой прогрессии, если знаменатель прогрессии равен q.

29. В геометрической прогрессии 1000 членов. Сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна S_1, а сумма членов с четными номерами равна S_2. Найдите знаменатель прогрессии.

30. Сумма первых десяти членов геометрической прогрессии равна S_1, а сумма следующих десяти членов (с 11-го до 20-го) равна S_2. Найдите знаменатель прогрессии.

31. В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 66, произведение второго и предпоследнего членов равно 128, сумма всех членов равна 126. Сколько членов в прогрессии?

32. Три конькобежца, скорости которых в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию, одновременно стартуют по кругу. Через некоторое время второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 м больше него. Третий конькобежец пробегает то расстояние, которое пробежал первый к моменту его обгона вторым за время, на $^2/_3$ мин большее, чем первый. Найдите скорость первого конькобежца.

33. Пусть S_n есть сумма n первых членов геометрической прогрессии. Докажите, что $S_n\,(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

34. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее сумма в три раза больше суммы трех ее первых членов.

35. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3,5, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна 147/16. Найдите сумму кубов членов этой прогрессии.

36. Сумма второго и восьмого членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 325/128, а сумма второго и шестого члена, уменьшенная на 65/32, равна четвертому члену этой же прогрессии. Найдите сумму квадратов членов этой прогрессии.

37. Разность между вторым и шестым членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $8/(9\sqrt{3})$, а разность между четвертым и восьмым членами той же прогрессии равна $8/(27\sqrt{3})$. Найдите отношение суммы квадратов членов этой прогрессии к сумме кубов этой же прогрессии.

38. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 243, а сумма ее первых пяти членов равна 275. Найдите прогрессию.

39. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению

функции $f(x)=x^3+3x-9$ на отрезке $[-2; 3]$, разность между первым и вторым членами прогрессии равна $f'(0)$. Найдите знаменатель прогрессии.

40. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют арифметическую прогрессию. Если средний член уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найдите неизвестное число.

41. Сумма трех положительных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 4, 19, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

42. Три положительных числа образуют арифметическую прогрессию. Третье число больше первого на 14. Если к третьему числу прибавить первое, а остальные два оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

43. Первый и третий члены арифметической прогрессии соответственно равны первому и третьему членам геометрической прогрессии, а второй член арифметической прогрессии превышает второй член геометрической прогрессии на 0,25. Вычислите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен 2.

44. Найдите трехзначное число, цифры которого в порядке следования образуют геометрическую прогрессию. Если из этого числа вычесть 792, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если же вторую цифру искомого числа увеличить на 2, цифры полученного числа образуют арифметическую прогрессию.

45. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если третий член уменьшить на 64, то полученные три числа составят арифметическую прогрессию. Если затем второй член этой прогрессии уменьшить на 8, то получится геометрическая прогрессия. Определите эти числа.

46. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если ко второму числу прибавить 8, то эти числа составят арифметическую прогрессию; если затем к третьему числу прибавить 64, то полученные числа вновь составят геометрическую прогрессию. Найдите эти три числа.

47. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится прогрессия арифметическая. Определите знаменатель данной прогрессии.

48. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 124. Если к первому числу прибавить 1, из третьего вычесть 65, а второе оставить без изменения, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите указанные прогрессии.

49. Три числа, произведение которых равно 125, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии и одновременно первым, третьим и шестым членами арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

50. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, третий член которой, утроенное произведение первого члена на четвертый и второй член образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью, равной $^1/_8$.

51. Если к четырем числам, составляющим арифметическую прогрессию, прибавить соответственно 5, 6, 9 и 15, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

52. Если к четырем числам, составляющим геометрическую прогрессию, прибавить соответственно 4, 21, 20 и 1, то получатся четыре числа, составляющих арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

53. Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 155, а сумма первых двух членов геометрической прогрессии равна 9. Определите эти прогрессии, если первый член арифметической прогрессии равен знаменателю геометрической прогрессии, а первый член геометрической прогрессии равен разности арифметической прогрессии.

§ 2. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Пользуясь определением предела числовой последовательности, докажите, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$.

2. Докажите, что последовательность (x_n), задаваемая формулой $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n^2}$, ограничена.

3. Какие из последовательностей ($n \in N$) являются ограниченными: а) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{3n}, \ldots$; б) $-2, -2, -2, \ldots, -2, \ldots$; в) $4, \frac{2}{1}, 4, \frac{2}{2}, 4, \frac{2}{3}, \ldots, 4, \frac{2}{n}, \ldots$; г) $1, -2, 3, -4, \ldots, n, -(n+1), \ldots$; д) $\cos 1^\circ, \cos 2^\circ, \cos 3^\circ, \ldots, \cos n^\circ, \ldots$; е) $0, 1, 0, 3, 0, 5, \ldots, 0, 2n-1, \ldots$; ж) $1, -2, 4, -8, \ldots, (-1)^{n-1} 2^{n-1}, \ldots$; з) $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \ldots, \frac{2n}{2n-1}, \ldots$?

4. Всякая ли ограниченная последовательность сходится?

5. Дайте определение неограниченной последовательности (не употребляя частицы «не»).

6. Пользуясь теоремой о пределе суммы двух сходящихся последовательностей, докажите, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-1} + \frac{2-3n^2}{n^2+1}\right) = -2$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n-1}{n^2-1}\right) = 0$.

7. Известно, что последовательность $(x_n + y_n)$ сходится. Сходятся ли последовательности (x_n) и (y_n)?

8. Пользуясь теоремой о пределе произведения двух сходящихся последовательностей, докажите, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+5n^3)(1-n+n^2)}{n^2(n^3+3)} = 5$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(15 + \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{n-7}{n+6}\right) = 15$.

9. Известно, что последовательность (x_n) сходится. Докажите, что последовательность $(-x_n)$ также сходится, причем если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (-x_n) = -a$.

10. Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$.

11. Известно, что последовательность a_n, $n \in N$, сходится, а последовательность b_n, $n \in N$, расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей а) $a_n + b_n$; б) $a_n b_n$?

12. Последовательности a_n и b_n, $n \in N$, расходятся. Можно ли утверждать, что последовательности а) $a_n + b_n$; б) $a_n b_n$ также расходятся?

13. Последовательности a_n и b_n, $n \in N$, таковы, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. Следует ли отсюда, что либо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, либо $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$?

14. Какие из следующих последовательностей являются монотонными: а) $\left(\frac{1n+1}{5n-1}\right)$; б) $\left((-1)^{n+1}\frac{2n+3}{n+7}\right)$; в) $\left(\frac{6n+4}{3n+2}\right)$; г) $\left(\frac{4n}{4n+7}\right)$; д) $(n^{(-1)^n})$; е) $\left(\frac{\sin n}{n}\right)$; ж) $((2+(-1)^n)n)$; з) $(4-5/3^n)$; и) $(2+1/4^n)$?

15. Докажите, что последовательность $\left(\frac{5n}{n+2}\right)$ ограничена и возрастает.

16. Докажите, что последовательность $\left(\frac{4^n\cdot n!}{4^n}\right)$ ограничена и убывает.

17. Последовательность (x_n) сходится к нулю, а последовательность (y_n) — произвольная. Можно ли утверждать, что предел последовательности $(x_n y_n)$ равен нулю?

Найдите пределы последовательностей:

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(n-3)}{(n-2)(n+4)}$. 19. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3-4}{n^4+6}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3-n^2+1}{2-3n^3}$. 21. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+3)^2}{n^2+1}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^3}{3n^3+3n^2}$. 23. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n+(-1)^n}{4n+(-1)^n}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sin n}{n^2+1}$. 25. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}-4^{n+1}}{3^n+4^n}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$ $(n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n,\ 1! = 1,\ n\in N)$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+4)!}$. 28. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n+1}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$.

32. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}-\right.$
$\left.-\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

33. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^n-b^{-n}}{b^n+b^{-n}}$, $b\neq0$.

ГЛАВА VI

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы выполнялись соотношения а) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$; б) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$; в) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$?

2. Ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ связаны соотношениями $\vec{b}=5\vec{a}$ и $\vec{c}=-2\vec{b}$. Определите а) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$; б) $|\vec{a}|/|\vec{c}|$.

3. При каких x справедливо неравенство $|(x-2)\vec{a}|<3\vec{a}|$, если $\vec{a}\neq\vec{0}$?

4. Пусть $\vec{a}\neq\vec{0}$. При каких x справедливы одновременно условия $|x\vec{a}|\geqslant|\vec{a}|$ и $(x\vec{a}+3\vec{a})\uparrow\uparrow\vec{a}$?

5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите значения x и y, при которых справедливо векторное равенство $2\vec{u}-\vec{v}=\vec{w}$, если $\vec{u}=x\vec{a}+2y\vec{b}$, $\vec{v}=-2y\vec{a}+3x\vec{b}$, $\vec{w}=4\vec{a}-2\vec{b}$.

6. Даны три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, каждые два из которых не коллинеарны. Найдите их сумму, если вектор $\vec{a}+\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b}+\vec{c}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$.

7. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Найдите числа p и q, при которых векторы $p\vec{a}+q\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{a}+p\vec{b}+q\vec{c}$ коллинеарны.

8. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны и $|\vec{c}| < |\vec{b}| < |\vec{a}|$. Верно ли утверждение $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \uparrow\uparrow \vec{a}$?

9. Точки A, B, C — вершины треугольника, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Найдите разложение вектора $\overrightarrow{AO}$, где O — точка пересечения медиан данного треугольника, по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

10. Точки M и K — середины сторон $[BC]$ и $[CD]$ параллелограмма $ABCD$. Найдите вектор $\overrightarrow{AC}$, если $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AK}=\vec{b}$.

11. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a}+\vec{b}$ делил пополам угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

12. Точки A, B, C — вершины треугольника, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $[AD]$ — биссектриса треугольника. Найдите орт $\vec{e}$, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{AD}$.

13. Даны точки $A(1; 3)$, $B(2; 4)$ и $C(5; 14)$. Найдите а) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$; б) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$.

14. При каких значениях x и y векторы $\vec{a}=(x; -2; 5)$ и $\vec{b}=(1; y; -4)$ коллинеарны?

15. Найдите координаты вектора $\vec{p}$, коллинеарного вектору $\vec{q}=(3; -4)$, если известно, что вектор $\vec{p}$ образует с осью Ox тупой угол и $|\vec{p}|=10$.

16. Даны три вектора: $\vec{a}=(3; -1)$, $\vec{b}=(1; -2)$, $\vec{c}=(-1; 7)$. Определите разложение вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

17. При каких x и y точки с координатами $A(2; 0)$, $B(0; 2)$, $C(0; 7)$ и $D(x; y)$ являются последовательными вершинами равнобочной трапеции $ABCD$?

18. Точки M_1 и M_2 — середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2. Найдите вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, если известно, что $A_1(0; 1; 2)$, $A_2(1; 2; 1)$, $B_1(-1; -1; 3)$ и $B_2(1; 0; 0)$.

19. Даны четыре точки: $A(-2; -3; 8)$, $B(2; 1; 7)$, $C(1; 4; 5)$ и $D(-7; -4; 7)$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны.

20. Векторы $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+4\vec{k}$ и $\overrightarrow{AC}=5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ служат сторонами треугольника ABC. Найдите длину медианы AM.

21. а) Найдите вектор $\vec{b}=(x; y; z)$, коллинеарный вектору $\vec{a}=(2\sqrt{2}; -1; 4)$, если $|\vec{b}|=10$;

б) вектор $\vec{x}$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $\vec{x}$ коллинеарен вектору $a = 6\vec{i} - 8\vec{j} - 7{,}5\vec{k}$; 2) $\vec{x}$ образует острый угол с осью Oz; 3) $|\vec{x}| = 50$. Найдите координаты вектора $\vec{x}$;

в) вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (3; -4; -12)$, образует с осью Ox тупой угол. Зная, что $|\vec{b}| = 26$, найдите его координаты.

22. Найдите координаты точки M, лежащей на оси Ox и одинаково удаленной от точек $A(1; 2; 3)$ и $B(-3; 3; 2)$.

23. Треугольная пирамида задана координатами своих вершин $A(3; 0; 1)$, $B(-1; 4; 1)$, $C(5; 2; 3)$, $D(0; -5; 4)$. Вычислите длину вектора $\vec{AO}$, если O - точка пересечения медиан треугольника BCD.

24. Компланарны ли векторы $\vec{a} = (3{,}7; 1/2; -3/4)$, $\vec{b} = (-3{,}2; 6; 4{,}3)$ и $\vec{c} = (9{,}8; -9{,}2; -1)$?

25. Даны три вектора: $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (-1; 1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -3)$. Найдите разложение вектора $\vec{d} = (11; -6; 5)$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

26. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ диагональ CB_1 делится точкой M в отношении $|CM| : |MB_1| = 2 : 3$. Найдите разложение вектора $\vec{AM}$ по векторам $\vec{AA_1}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$.

27. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано: $AA_1 = 12$, $AB = 3$, $|AD| = 4$. Найдите разложение орта $\vec{e}$, сонаправленного с вектором $\vec{AC_1}$, по прямоугольному базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ сонаправлены соответственно с векторами $\vec{AD}$, $\vec{AB}$ и $\vec{AA_1}$.

28. Точки M_1 и M_2 являются соответственно точками пересечения медиан граней ADB и BDC тетраэдра $ABCD$. Найдите отношение $|\vec{AC}| : |\vec{M_1M_2}|$.

29. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, пересекающихся в этой вершине. Найдите величину равнодействующей этих трех сил.

30. Вектор $\vec{OM}$ определен прямоугольными координатами точек $O(0; 0; 1)$ и $M(\alpha; \beta; 3)$. Какому условию должны удовлетворять параметры α и β, чтобы конец вектора $\vec{OM}$ принадлежал сфере $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$?

§ 2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Определите угол между векторами $2\vec{a}$ и $\frac{1}{2}\vec{b}$, если $\vec{a}=(-4;\ 2;\ 4)$, $\vec{b}=(\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ 0)$.

2. При каком значении z векторы $\vec{a}=(6;\ 0;\ 12)$ и $\vec{b}=(-8;\ 13;\ z)$ перпендикулярны?

3. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=60^\circ$.

4. Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, удовлетворяющими системе уравнений $\begin{cases} 2\vec{p}+\vec{q}=\vec{a}, \\ \vec{p}+2\vec{q}=\vec{b}, \end{cases}$ если известно, что в прямоугольной системе координат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют вид $\vec{a}=(1;\ 1)$, $\vec{b}=(1;\ -1)$.

5. Докажите, что вектор $\vec{p}=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$.

6. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ таковы, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Зная, что $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=14$, $|\vec{c}|=15$, вычислите $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$.

7. Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(1;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 2)$, $C(3;\ 3;\ 1)$. Найдите угол треугольника при вершине A.

8. Вершины треугольника находятся в точках $A(3;\ -2;\ 1)$, $B(3;\ 0;\ 2)$ и $C(1;\ 2;\ 5)$. Найдите величину угла, образованного медианой BD с основанием треугольника AC.

9. Треугольник задан координатами своих вершин $A(1;\ 1;\ 2)$, $B(3;\ 4;\ 2)$ и $C(5;\ 6;\ 4)$. Найдите величину внешнего угла треугольника при вершине B.

10. Две вершины треугольника ABC заданы координатами $A(1;\ 1;\ 3)$, $B(-1;\ 2;\ 5)$. Третья вершина — точка C — находится на координатной оси Oz. Установите зависимость между величиной угла α при вершине A и расстоянием точки C до плоскости Oxy.

11. На координатной плоскости заданы точки $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$ и $C(5;\ 5)$. Вычислите площадь треугольника ABC.

12. Векторы $\overrightarrow{AB}=(3;\ -2;\ 2)$ и $\overrightarrow{BC}=(-1;\ 0;\ 2)$ являются смежными сторонами параллелограмма. Определите величину угла между его диагоналями AC и BD.

13. Докажите, что точки $A(2;\ 4;\ -4)$, $B(1;\ 1;\ -3)$, $C(-2;\ 0;\ 5)$, $D(-1;\ 3;\ 4)$ являются вершинами парал-

лелограмма, и вычислите величину угла между его диагоналями.

14. Докажите, что точки $A(1; -1; 1)$, $B(1; 3; 1)$, $C(4; 3; 1)$, $D(4; -1; 1)$ являются вершинами прямоугольника. Вычислите длину его диагоналей и координаты их точки пересечения.

15. Найдите вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{a}\vec{b} = 3$.

16. Найдите вектор $\vec{c}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a} = (2; 3; -1)$ и $\vec{b} = (1; -2; 3)$ и удовлетворяет условию $\vec{c}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

17. Вычислите координаты вектора $\vec{c}$, перпендикулярного векторам $\vec{a} = 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ и образующего тупой угол с осью Oy, если $|\vec{c}| = \sqrt{7}$.

18. Даны векторы $\vec{a} = (3; -1; 5)$ и $\vec{b} = (1; 2; -3)$. Найдите вектор $\vec{c}$ при условии, что он перпендикулярен оси Oz и удовлетворяет условиям $\vec{c}\vec{a} = 9$, $\vec{c}\vec{b} = -4$.

19. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$.

20. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y = 6/x$ заданы две точки A и B такие, что $\overrightarrow{OA}\vec{i} = -2$ и $\overrightarrow{OB}\vec{i} = 3$, где $\vec{i}$ — единичный вектор оси Ox. Найдите длину вектора $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$.

21. Найдите вектор $\vec{a} = (x; y; z)$, образующий равные углы с векторами $\vec{b} = (y; -2z; 3x)$, $\vec{c} = (2z; 3x; -y)$, если вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{d} = (1; -1; 2)$, $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ и угол между вектором $\vec{a}$ и осью Oy тупой.

22. При каких значениях x угол между векторами $\vec{a} = x\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 2x\vec{i} + x\vec{j} - \vec{k}$ острый, а угол между вектором $\vec{b}$ и осью ординат тупой?

23. Точки M, N, P, Q расположены в пространстве так, что $(MN) \perp (PQ)$, $(MP) \perp (NQ)$. Докажите, что $(MQ) \perp (NP)$.

24. Вычислите величину тупого угла, образованного медианами, проведенными из вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

25. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC. Найдите разложение

по базису $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектора, приложенного к вершине B этого треугольника и совпадающего с его высотой BM.

26. Треугольник ABC задан координатами вершин $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$. Найдите вектор $\overrightarrow{BM}$, где точка M есть основание высоты, проведенной из вершины B.

27. Тетраэдр $ABCD$ задан координатами своих вершин $D(1; 0; 0)$, $A(3; -2; 1)$, $B(3; 1; 5)$, $C(4; 0; 3)$. Найдите величину двугранного угла, образованного боковой гранью ADC и плоскостью основания ABC.

28. Напишите уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(0; 3; 0)$, $M_3(2; 1; 0)$.

29. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4, 0, 0)$ и $B(0, 0, 4)$ и параллельной оси Oy.

30. При каком значении k точки $A(1, 0, 3)$, $B(-1, 3, 4)$, $C(1, 2, 1)$ и $D(k; 2; 5)$ лежат в одной плоскости?

31. Даны четыре точки: $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$. а) Докажите, что эти точки лежат в одной плоскости; б) определите величину угла между прямыми (AC) и (BD); в) определите площадь четырехугольника $ABCD$.

32. Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 1)$, $C(3; 2; 1)$, и плоскостью, проходящей через точки A, B и $D(3; 1; 2)$.

33. Даны уравнения плоскостей $2x+3y+4z-8=0$ и $4x+y+3z-6=0$; p — прямая, по которой пересекаются эти плоскости. а) Определите координаты точек пересечения прямой p с плоскостями xOy и yOz; б) определите величину угла между прямой p и плоскостью xOz.

34. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $(AA_1)\ (BB_1)\parallel(CC_1)\parallel(DD_1)$, равна 12. Вершина B куба совпадает с началом координат $Oxyz$, а точки A, C и B_1 расположены на осях Ox, Oy, Oz соответственно (в положительном направлении). На ребрах $[AA_1]$, $[B_1C_1]$ и $[CD]$ взяты точки E, F_1, G такие, что $|AE|:|EA_1|=1:3$, $|B_1F_1|:|F_1C_1|=1:1$, $|CG|:|GD|=1:1$. а) Определите координаты точек E, F_1 и G;

б) составьте уравнение плоскости (EF_1G);

в) найдите расстояние от точки B_1 до плоскости (EF_1G).

ГЛАВА VII

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. Точка M — середина отрезка $[AB]$. Докажите, что $|CM| = \frac{1}{2}\,||AC| - |BC||$, если $C \in [AB]$, и $|CM| = \frac{|AC| + |BC|}{2}$, если $C \in (AB)$, но $C \notin [AB]$.

2. В плоскости α проведены пять прямых, пересекающихся в точке O. Докажите, что сумма величин пяти не прилежащих один к другому углов с общей вершиной O равна π.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина диагонали AC равна длине стороны AD. Докажите, что $|BC| < |BD|$.

4. Докажите, что в трапеции, диагонали которой служат биссектрисами углов при одном из оснований, длины трех сторон равны.

5. Докажите, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

6. Пусть a и b $(a > b)$ — длины оснований трапеции. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям, а его длина равна $(a-b)/2$.

7. В параллелограмме проведены биссектрисы его внутренних углов. Докажите, что точки пересечения биссектрис являются вершинами прямоугольника, длина диагонали которого равна разности длин соседних сторон.

8. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны CB, N — середина стороны CD. Докажите, что прямые (AM) и (AN) делят диагональ BD на три равные части.

9. Докажите, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

10. Через точку O пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Докажите, что точка O делит пополам отрезок, отсекаемый от прямой боковыми сторонами трапеции.

11. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, принадлежащей правильному треугольнику, до его сторон равна длине его высоты.

12. Пусть p — полупериметр, S — площадь треугольника, r — радиус вписанной окружности. Докажите, что $r = S/p$.

13. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, S — площадь треугольника, R — радиус описанной окружности. Докажите, что $R = abc/(4S)$.

14. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.

15. Через точку A, лежащую вне круга, проведены две прямые, одна из которых касается окружности, служащей границей круга, в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D, причем точка C лежит между точками A и D. Докажите, что $|AD| \cdot |AC| = |AB|^2$.

16. Докажите, что любая точка выпуклого четырехугольника принадлежит хотя бы одному из кругов, диаметрами которых являются стороны четырехугольника.

17. В окружность вписан четырехугольник $MNPQ$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке F. Прямая, проходящая через точку F и середину стороны NP, пересекает сторону MQ в точке H. Докажите, что FH — высота треугольника MFQ.

18. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $ABDE$ и $BCKF$. Докажите, что $|DF| = 2|BP|$, где $[BP]$ — медиана треугольника ABC.

19. На основаниях AB и CD трапеции $ABCD$ построены квадраты (вне ее). Докажите, что прямая, соединяющая центры квадратов, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

20. Пусть a, b — длины сторон параллелограмма, d_1, d_2 — длины его диагоналей. Докажите, что $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

§ 2. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

1. Через точку A, расположенную внутри угла, проведите прямую так, чтобы точка A была серединой отрезка, отсекаемого от прямой сторонами угла.

2. Постройте треугольник, если даны две стороны и медиана, выходящие из общей вершины.

3. Точки A и B принадлежат одной из полуплоскостей, на которые плоскость делится прямой p. На прямой p найдите точку, сумма расстояний от которой до точек A и B является наименьшей.

4. Постройте биссектрису угла, вершина которого расположена за пределами листа бумаги.

5. Внутри угла ABC с недоступной вершиной B дана точка D. Постройте прямую (BD).

6. Постройте треугольник по его медианам.

7. Даны отрезки длиной a и b. Постройте отрезки, длины которых равны а) $\sqrt{ab}$; б) $\sqrt{a^2-ab+b^2}$; в) $\sqrt{a^2-2ab+4b^2}$.

8. Постройте треугольник, зная его периметр и два угла.

9. Впишите в данный круг треугольник, подобный данному треугольнику.

10. Даны окружность с центром в точке O и точка A, расположенная вне круга, ограниченного этой окружностью. а) Постройте касательную к окружности, проходящую через точку A; б) через точку A проведите прямую, пересекающую окружность в точках B и C так, чтобы $|AC|=2|AB|$ (точка B лежит между A и C).

11. Постройте три касающиеся друг друга внешним образом окружности с центрами в вершинах данного треугольника.

12. Точки A и B принадлежат одной из полуплоскостей, на которые плоскость делится прямой p; а) постройте окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся прямой p; б) найдите точку $C\in p$ такую, чтобы угол ACB был наибольшим.

13. Через данную точку плоскости, расположенную вне данного угла, проведите прямую, отсекающую от угла треугольник заданного периметра.

§ 3. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

1. В треугольнике ABC $|AB|=c=13$ см, $|BC|=a=14$ см, $|AC|=b=15$ см. Определите: а) величину наибольшего внутреннего угла этого треугольника; б) площадь S; в) длину h_b высоты BD; г) дли-

ну r радиуса вписанной окружности; д) длину R радиуса описанной окружности; е) длину l_b биссектрисы BE угла $B(E \in [AC])$; ж) длину m_b медианы BF; з) расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей; и) расстояние между точкой пересечения медиан G и центром описанной окружности.

2. Определите площадь треугольника, если основание равно a, углы при основании 30 и 45°.

3. В треугольнике известны длины двух сторон 6 и 3 см. Найдите длину третьей стороны, если полусумма длин высот, опущенных на данные стороны, равна длине третьей высоты.

4. В прямоугольном треугольнике катеты относятся как 3 : 2, а высота делит гипотенузу на отрезки, из которых один на 2 м больше другого. Определите длину гипотенузы.

5. В треугольнике ABC $|AB| = |BC|$, O — точка пересечения высот. Найдите $\widehat{ABC}$, если $|OB| = |AC|$.

6. В равнобедренный треугольник с углом при вершине 120° и боковой стороной, равной a, вписана окружность. Найдите радиус окружности.

7. Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника, опущенную на основание, на отрезки длиной 5 и 3 см, считая от вершины. Определите длины сторон треугольника.

8. Вписанная окружность касается гипотенузы прямоугольного треугольника в точке, делящей гипотенузу на отрезки, длины которых равны двум и трем единицам. Найдите радиус этой окружности.

9. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20 дм. Определите расстояние от центра вписанного круга до высоты, опущенной на гипотенузу.

10. Определите углы равнобедренного треугольника, зная, что точка пересечения его высот принадлежит вписанной окружности.

11. В треугольник вписана окружность радиусом 4 см. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки длиной 6 и 8 см. Найдите длины других сторон треугольника.

12. Боковая сторона равнобедренного треугольника имеет длину 10 см, основание — 12 см. К окружности, вписанной в треугольник, проведены касательные, параллельные высоте треугольника и отсекаю-

щие от него два малых прямоугольных треугольника. Найдите длины сторон этих треугольников.

13. Из центра окружности, вписанной в треугольник со сторонами 13, 14, 15, проведена другая окружность радиуса 5. Найдите длины хорд, отсекаемых этой окружностью на сторонах треугольника.

14. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиус вписанного круга равен r, а радиус вневписанного круга, касающегося гипотенузы и продолжений катетов, равен R.

15. В прямоугольном треугольнике длины катетов равны 75 и 100 дм. Основание высоты, проведенной из вершины прямого угла, делит гипотенузу на два отрезка, на которых построены полукруги по одну сторону с данным треугольником. Определите длины отрезков катетов, заключенных внутри этих кругов.

16. На стороне AB треугольника ABC взята точка M так, что $|AM| : |MB| = 1 : 1$. Вычислите $|CM|$, если $|AC| = 6$, $|BC| = 4$, $\angle ACB = 120°$.

17. Медиана, проведенная к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит его периметр на две части длиной 15 и 6 см. Определите длины сторон треугольника.

18. В треугольнике ABC $|AB| = 2$ см, $[BD]$ — медиана, $|BD| = 1$ см, $\angle BDA = 30°$. Найдите площадь треугольника ABC.

19. Найдите площадь такого треугольника, сторонами которого служат медианы треугольника с площадью, равной S.

20. Катеты прямоугольного треугольника равны b и c. Найдите длину биссектрисы прямого угла.

21. В треугольнике ABC $|AB| = 3$ см, $|AC| = 5$ см, $\angle BAC = 120°$. Найдите длины биссектрисы $[BD]$ и отрезков $[AD]$ и $[CD]$.

22. В треугольнике ABC дано $\hat{B} : \hat{C} = 1 : 3$, биссектриса угла BAC делит площадь треугольника в отношении 2 : 1. Найдите величины углов треугольника.

23. В $\triangle ABC$ величина угла A вдвое больше величины угла B; $|AC| = b$, $|AB| = c$. Найдите $|BC|$.

24. В прямоугольном треугольнике ABC длина высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, равна a и длина биссектрисы этого же угла равна b. Найдите площадь треугольника ABC.

25. В равнобедренном треугольнике ABC $|AB| = |BC|$, медиана AD и биссектриса CE взаимно перпендикулярны. Определите величину угла ADB.

26. В $\triangle ABC$ $|AC| = 13$ см, $|AB| + |BC| = 22$ см, $ABC = 60^\circ$. Найдите длины сторон $[AB]$ и $[BC]$.

27. В треугольник вписан параллелограмм, длины сторон которого равны 3 и 4 см, а длина одной из диагоналей — 4 см. Найдите длины сторон треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма соответственно параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон принадлежит основанию треугольника.

28. В параллелограмме с длинами сторон a и b и острым углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки пересечения биссектрис.

29. На сторонах квадрата вне его построены правильные треугольники и их вершины последовательно соединены. Определите отношение периметра полученного таким образом четырехугольника к периметру данного квадрата.

30. Определите площадь равнобедренной трапеции, у которой длины оснований равны 10 и 26 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.

31. Один из углов трапеции равен 30°, а боковые стороны при продолжении пересекаются под прямым углом. Найдите меньшую боковую сторону трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а одно из оснований — 8 см.

32. Определите длину высоты трапеции, если ее основания $a = 28$ см и $b = 16$ см, а боковые стороны $c = 25$ см и $d = 17$ см.

33. Найдите площадь трапеции, у которой длины оснований равны a и b, $a > b$, а острые углы между большим основанием и боковыми сторонами — α и β.

34. Около круга радиуса 2 см описана равнобочная трапеция с площадью 20 см^2. Найдите длины сторон трапеции.

35. Около окружности радиуса r описана равнобочная трапеция $ABCD$; E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой стороной AD равен 60°. Определите площадь четырехугольника $ABEK$.

36. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния 4 и 8 см. Найдите длину средней линии трапеции.

37. Длины оснований равнобочной трапеции равны 21 и 9 см, а длина высоты — 8 см. Определите радиус окружности, описанной около этой трапеции.

38. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC. Найдите углы трапеции.

39. Длины оснований трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, соединяющего боковые стороны трапеции, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции пополам.

40. В трапеции $ABCD$ $[AD] \parallel [BC]$, $|AD|=a$, $|BC|=b$, O — точка пересечения диагоналей. Найдите отношение площади трапеции к площади треугольника AOD.

41. В острый угол, равный 60°, вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен r. Найдите радиус большей окружности.

42. Радиус сектора равен R, а радиус окружности, вписанной в этот сектор, равен r. Вычислите площадь сектора.

43. Даны две непересекающиеся окружности радиусов R и $2R$. К ним проведены общие касательные, которые пересекаются в точке A отрезка, соединяющего центры окружностей. Расстояние между центрами окружностей равно $2R\sqrt{3}$. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных, заключенными между точками касания, и большими дугами окружностей, соединяющими точки касания.

44. Биссектриса $[AE]$ угла A рассекает четырехугольник $ABCD$ на равнобедренный треугольник ABE ($|AB|=|BE|$) и ромб $AECD$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD, в 1,5 раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ABE. Найдите отношение периметров треугольников ECD и ABE.

45. В полукруг радиуса R вписаны два круга, касающиеся друг друга, полукруга и его диаметра. Величина радиуса одного из них равна r. Найдите радиус другого круга.

46. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AC и BC соответственно в точках M и N и пересекает биссектрису BD в точках P и Q. Найдите отношение площадей треугольников PQM и PQN, если $A=\pi/4$, $B=\pi/3$.

47. Две окружности радиусов $\sqrt{2}$ см и 1 см пересекаются в точке A. Расстояние между центрами окружностей равно 2 см. Хорда $[AC]$ большей окружности пересекает меньшую окружность в точке B и делится этой точкой пополам. Найдите длину хорды $[AC]$.

48. Диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются под прямым углом, сумма их длин равна 6 см. Каково наибольшее возможное значение площади этого четырехугольника?

49. При каком значении длины высоты прямоугольная трапеция с острым углом 45° и периметром 4 см имеет наибольшую площадь?

50. В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании AC равен α, а длина боковой стороны равна a. Точка D расположена на высоте BM и имеет наименьшую по сравнению с остальными точками отрезка BM сумму квадратов расстояний до точек A, B и C. Найдите длину отрезка MD.

51. Две стороны параллелограмма лежат на сторонах данного треугольника, а одна из его вершин принадлежит третьей стороне. При каких условиях площадь параллелограмма будет наибольшей?

ГЛАВА VIII

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 1. ПРЯМАЯ, ПЛОСКОСТЬ. МНОГОГРАННИКИ. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

1. Два прямоугольных треугольника лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеют общую гипотенузу. Найдите расстояние между вершинами прямых углов этих треугольников, если длины катетов этих треугольников равны 4 и 3 см.

2. Из точки ребра двугранного угла, величина которого равна φ, в одной из его граней проведен отре-

зок, составляющий с этим ребром угол ψ. Какой угол образует отрезок с плоскостью другой грани?

3. Катеты AB и AC прямоугольного треугольника принадлежат граням α и β острого двугранного угла и образуют с ребром этого двугранного угла соответственно острые углы φ и ψ. Определите величину двугранного угла.

4. Вершины A и B прямоугольника $ABCD$ удалены от плоскости γ на расстояние $8\,l$ каждая, а середина M стороны $[CD]$ принадлежит плоскости γ. Диагонали AC и BD прямоугольника пересекаются в точке O. Определите расстояние от центра описанной около $\triangle AOB$ окружности до плоскости γ, если $\overset{\frown}{ADB}=\varphi$.

5. Вершины A и B правильного треугольника ABC удалены от некоторой плоскости β на расстояние, равное h, а точка C — на расстояние, равное $m\,(h>m)$. На каком расстоянии от плоскости β находится центр вписанного в треугольник ABC круга?

6. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и образует с плоскостью основания угол величиной α. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площадь его основания равна S.

7. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен α. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол β. Найдите высоту параллелепипеда, если его объем равен V.

8. Основания параллелепипеда — квадраты со стороной b, а все боковые грани — ромбы. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Найдите объем параллелепипеда.

9. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина ребра A_1B_1, точка N — центр грани ABB_1A_1. Определите величину угла между прямыми MD и CN.

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите величину угла между плоскостями (BCB_1) и (BC_1M), где M — середина ребра AD.

11. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точка P — середина ребра CC_1, точка Q — центр грани AA_1B_1B. Отрезок MN с концами на прямых AD и A_1B_1 пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найдите длину этого отрезка.

12. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы, равная l, составляет угол β с плоскостью другой боковой грани. Найдите объем призмы.

13. Равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным α, и периметром, равным p, служит основанием прямой призмы. Угол между диагоналями конгруэнтных (равных) боковых граней призмы, проведенными из одной вершины, равен β. Найдите объем призмы.

14. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы и противоположную вершину верхнего проведена плоскость под углом α к плоскости основания. Площадь сечения призмы этой плоскостью равна S. Найдите объем отсеченной пирамиды.

15. Призма $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная, причем $|BB_1|=2|AC|$. Точки E и F — центры граней AA_1B_1B и CC_1B_1B. Точка P — центр основания ABC, точка Q — середина ребра CC_1. Определите величину угла между прямыми EF и PQ.

16. Стороны основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой, проходящей через точки C_1 и B, а вершины P и Q — на прямой A_1C. Найдите объем призмы.

17. Длина стороны основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 3, а высота — $4\sqrt{3}$. Вершина правильного тетраэдра принадлежит отрезку, соединяющему центры граней ABC и $A_1B_1C_1$. Плоскость основания этого тетраэдра совпадает с плоскостью грани ABC призмы, а плоскость одной из его боковых граней проходит через диагональ AB_1 боковой грани призмы. Найдите длину ребра тетраэдра.

18. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точки M и N являются соответственно серединами ребер AC и A_1B_1. Проекция отрезка MN на прямую (BA_1) равна $a/2\sqrt{6}$. Определите высоту призмы.

19. Длина каждого ребра тетраэдра $SABC$ равна a. Найдите расстояние между (SA) и (BC).

20. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α и удалено от середины противоположной стороны основания на расстояние k.

21. Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и апофемой пирамиды равен α, длина бокового ребра пирамиды равна l. Найдите объем пирамиды.

22. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен на боковую грань перпендикуляр, равный b. Найдите объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α.

23. Найдите полную поверхность правильной треугольной пирамиды по данному ее объему V и углу α наклона боковой грани к плоскости основания.

24. В основании треугольной пирамиды, все боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом α, лежит правильный треугольник, длина стороны которого a. Определите объем пирамиды.

25. Основаниями усеченной треугольной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ являются правильные треугольники, длины сторон которых равны a и b $(a>b)$. Боковые грани наклонены к плоскости нижнего основания под углом α. Найдите объем многогранника AB_1C_1CB.

26. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник, длина стороны которого равна a. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Боковая грань SBC наклонена к плоскости основания под углом φ. Определите площадь боковой поверхности пирамиды, если за основание ее принята одна из боковых граней.

27. Через вершину C основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ проведена плоскость перпендикулярно боковому ребру SA. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол, косинус которого равен $^2/_3$. Найдите косинус угла между боковыми гранями.

28. Отрезок прямой, соединяющей центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

29. а) В трехгранном угле $SABC$ $\widehat{ASB}=\beta$, $\widehat{ASC}=\gamma$, $\widehat{BSC}=\alpha$. Величина двугранного угла при ребре AS равна A. Докажите, что $\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$ (теорема косинусов для трехгранного угла); б) найдите величину двугранного угла между боковыми гранями правильной треугольной пирами-

ды, если величина двугранного угла между боковой гранью и основанием равна φ.

30. Длина высоты правильной треугольной пирамиды равна h, а величина двугранного угла, образованного боковыми гранями, равна 2φ. Определите объем пирамиды.

31. Треугольная пирамида рассечена плоскостью на два многогранника. Найдите отношение объемов этих многогранников, если известно, что секущая плоскость делит три ребра, сходящиеся в одной вершине пирамиды, в отношении 1 : 2, 1 : 2 и 2 : 1, считая от вершины.

32. Объем правильной треугольной пирамиды равен $^1/_6$ объема куба, длина ребра которого равна длине бокового ребра пирамиды. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

33. Боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды равны a и наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности и объем пирамиды.

34. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота — $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между боковым ребром SA и диагональю основания BD.

35. Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, в которой сторона основания a, а двугранный угол между боковыми гранями равен α.

36. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, длина бокового ребра которой равна l, а величина двугранного угла, образованного двумя противоположными гранями, равна β.

37. В правильной четырехугольной пирамиде длина стороны основания равна a, величина плоского угла при вершине равна углам наклона боковых ребер к плоскости основания. Найдите объем пирамиды.

38. В основании пирамиды $MABCD$ лежит ромб $ABCD$, диагональ которого $[AC]$ имеет длину, равную a. Прямая (DM) составляет с плоскостью основания пирамиды угол величиной α и $|DM| = k$. Найдите площадь полной поверхности куба, объем которого равен объему данной пирамиды, если известно, что угол между прямыми (DM) и (MB) равен γ и $\widehat{MBC} = \widehat{ABM}$.

39. Основанием пирамиды служит ромб, длины диагоналей которого 6 и 8 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и имеет длину, равную 1 м. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

40. Основанием пирамиды $SABCD$ служит квадрат. Ребро SA перпендикулярно основанию. Площадь основания в m раз меньше площади боковой поверхности. Найдите углы наклона граней SCD и SBC к плоскости основания.

41. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S является ромб, а высота пирамиды SO проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Вычислите величину двугранного угла, образованного боковой гранью SAB и основанием пирамиды, если $ASO=\alpha$ и $BSO=\beta$.

42. Величина двугранного угла при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равна α. Определите величину угла между боковой гранью пирамиды и плоскостью основания.

43. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ угол между боковым ребром SA и плоскостью основания $ABCD$ равен углу между ребром SA и плоскостью грани SBC. Определите величину этого угла.

44. Боковая поверхность цилиндра, будучи развернута, представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна a и составляет угол α с основанием. Найдите объем цилиндра.

45. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра под углом α° к плоскости основания, пересекает верхнее основание по хорде длиной b, стягивающей дугу в β°. Найдите объем цилиндра.

46. Площадь полной поверхности конуса S, угол при вершине осевого сечения α. Найдите объем конуса.

47. В основание конуса вписан правильный треугольник, длина стороны которого равна a. Плоскость, проходящая через вершину конуса и сторону треугольника, образует в сечении с поверхностью конуса правильный треугольник. Найдите объем конуса.

48. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает его основание по хорде, длина которой

равна радиусу этого основания. Определите отношение объемов образовавшихся частей конуса.

49. В конусе через его вершину проведено сечение под углом β к плоскости основания. Плоскость сечения удалена от центра основания конуса на расстояние a. Определите полную поверхность конуса, если величина наибольшего угла между образующими конуса равна α.

50. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой $|AC|=6$, $|AA_1|=8$. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N. В каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $|BM|=|MB_1|$ и AN — биссектриса угла CAC_1?

§ 2. ЗАДАЧИ НА КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

1. Объем правильной треугольной призмы равен V. Через вершину основания параллельно противоположному ребру этого основания под углом α к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая от призмы пирамиду объемом W. Определите высоту призмы, если $V>3W$.

2. Куб с ребром, равным a, вписан в правильную четырехугольную пирамиду так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах, а четыре другие вершины — на основании пирамиды. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Определите объем пирамиды.

3. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, $|AB|=|AC|=a$, $\widehat{ABC}=\varphi$. Прямая (AS) составляет с плоскостью основания пирамиды угол величиной α, плоскость боковой грани (BSC) составляет с той же плоскостью угол величиной β и $\widehat{SAC}=\widehat{SAB}$. Найдите объем пирамиды $KSLC$, если известно, что точки K и L принадлежат ребрам $[AS]$ и $[BS]$ соответственно, а площадь $\triangle KSL$ относится к площади треугольника ABS как $4:25$.

4. В правильную четырехугольную пирамиду с плоским углом α при вершине вписан цилиндр, нижнее основание которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касает-

ся боковых граней пирамиды. Найдите объем пирамиды, если известно, что высота цилиндра в два раза меньше высоты пирамиды, а радиус основания равен r.

5. Определите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду, если длина бокового ребра пирамиды равна l и боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол α.

6. Найдите объем конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду с боковым ребром l и плоским углом α при вершине.

7. В правильную треугольную усеченную пирамиду с двугранным углом α при основании вписан усеченный конус. Определите боковую поверхность конуса, если апофема боковой грани пирамиды равна сумме радиусов оснований конуса, а радиус меньшего основания конуса равен r.

8. Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α. В пирамиду вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите объем конуса.

9. Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб. Большая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол, величина которого равна α. Найдите величину острого угла ромба.

10. В прямоугольном параллелепипеде длина бокового ребра равна c, а длины сторон прямоугольника, лежащего в основании, равны a и b. Через одну из вершин верхнего основания параллелепипеда и противолежащую ей вершину нижнего основания проведена плоскость, параллельная диагонали прямоугольника, лежащего в основании. Найдите радиус сферы, касающейся указанной плоскости и плоскости нижнего основания параллелепипеда в точке пересечения его диагоналей.

11. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а длина высоты пирамиды — h. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

12. В основании треугольной пирамиды, высота которой равна h, лежит прямоугольный треугольник с катетом равным a, и острым углом α, прилежащим к

этому катету. Вершина пирамиды проектируется в вершину прямого угла этого треугольника. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

13. Определите объем шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой a, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α.

14. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями. Боковые ребра образуют с плоскостью основания угол φ. Определите объем пирамиды, если радиус описанного шара равен R. Центр шара лежит внутри пирамиды.

15. Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что объем шара, описанного вокруг пирамиды, равен V, а перпендикуляр, опущенный из центра шара на ее боковую грань, образует с высотой пирамиды угол α. Центр шара находится внутри пирамиды.

16. Радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, относится к стороне основания пирамиды как $3:4$. Найдите величину угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

17. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, в котором $(AB)\parallel(CD)$, $(BC)\parallel\parallel(AD)$, $|AB|=3$, $|BC|=4$. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания равные углы. Определите величину угла между прямыми (BS) и (CS), если радиус сферы, описанной около пирамиды, равен 6,5.

18. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны b, а угол между ними равен α. Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные (конгруэнтные) стороны основания, перпендикулярны основанию, а третья грань наклонена к нему под углом α. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

19. Длина высоты правильной треугольной пирамиды равна h, а радиус круга, вписанного в основание этой пирамиды, равен r. Через середины двух сторон основания и вершину пирамиды проведена секущая плоскость. Найдите радиус сферы, касающейся основания пирамиды в точке пересечения его медиан и секущей плоскости.

20. Длина каждого ребра тетраэдра равна 1. Найдите радиус сферы, касающейся всех плоскостей граней тетраэдра.

21. В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Каждый из двугранных углов при основании равен φ. Найдите объем шара, вписанного в эту пирамиду.

22. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине равен α. Найдите площадь поверхности сферы, вписанной в пирамиду.

23. Угол между плоскостями основания и боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равен β, площадь сферы, вписанной в пирамиду, равна S. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

24. В правильной четырехугольной пирамиде величина каждого плоского угла при вершине равна β, а радиус шара, касающегося всех пяти плоскостей граней пирамиды, равен R. Найдите объем пирамиды.

25. Около шара описана правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой длины сторон оснований относятся как $m : n$. Определите отношение объемов пирамиды и шара.

26. Найдите величину радиуса шара, касающегося основания и боковых ребер правильной четырехугольной пирамиды, у которой величина стороны основания равна a, а величина плоского угла при вершине равна 2β.

27. Шар радиуса R вписан в конус. Из центра шара образующая конуса видна под углом α. Найдите объем конуса.

28. Сфера касается плоскости основания прямого кругового конуса в его центре. Плоскость, образующая с высотой конуса угол γ, касается указанной сферы и отсекает на окружности основания дугу с острым центральным углом α. Найдите радиус сферы, если радиус окружности основания конуса равен r.

29. Найдите отношение объема прямого кругового конуса к объему шара, вписанного в этот конус, если известно, что образующая конуса составляет с плоскостью основания конуса угол α.

30. Найдите угол между образующей и основанием усеченного конуса, полная поверхность которого вдвое больше поверхности вписанного в него шара.

31. Около шара описан усеченный конус, площадь нижнего основания которого в a раз больше площади его верхнего основания. Во сколько раз объем усеченного конуса больше объема шара?

32. Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно q. Найдите отношение объемов этих тел.

33. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Апофема пирамиды, равная l, образует угол α с основанием пирамиды. В шар вписан цилиндр. Определите отношение объема пирамиды к объему цилиндра, если высота цилиндра равна удвоенному радиусу его основания.

34. В шар вписана правильная треугольная пирамида так, что плоскость основания пирамиды делит перпендикулярный ей радиус шара в отношении 3 : 7, считая от центра шара. Найдите объем конуса, вписанного в пирамиду. Радиус шара равен R.

35. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, основание которой делит перпендикулярный ему радиус пополам. Определите площадь поверхности шара, вписанного в пирамиду.

36. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник ABC. Радиус окружности, описанной около него, равен r, катет AC стягивает дугу, равную $2\beta°$. Через диагональ боковой грани, проходящей через другой катет BC, проведена плоскость перпендикулярно этой грани, образующая с плоскостью основания угол $\beta°$. Определите площадь сечения.

37. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α, причем длина высоты призмы больше длины наибольшей диагонали основания. Под каким углом к плоскости основания следует провести секущую плоскость, чтобы в сечении призмы получился квадрат?

38. В основании прямой призмы лежит равнобочная трапеция с острым углом α, описанная около круга радиуса r. Через боковую сторону нижнего основания и противоположную вершину острого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью нижнего основания двугранный угол величиной β. Определите площадь сечения призмы этой плоскостью.

39. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину S параллельно ребру $[AB]$ и составляющего с плоскостью основания ABC угол γ.

40. Длина апофемы боковой грани правильной треугольной пирамиды равна k. Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех ее вершин. Найдите площадь получившегося сечения, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью ее основания угол величиной β.

41. Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды равна l, а величина угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания равна β. Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех ее вершин. Определите площадь получившегося сечения.

42. В правильной четырехугольной пирамиде длина стороны основания равна a, боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно боковому ребру, выходящему из противоположной вершины основания. Найдите площадь сечения.

43. В правильной четырехугольной пирамиде боковая грань наклонена к основанию под углом α. Радиус вписанной в пирамиду сферы равен r. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через центр вписанного шара параллельно основанию пирамиды.

44. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина стороны основания $ABCD$ равна a, а длина высоты — $2a\sqrt{2}$. Через вершину A параллельно диагонали BD основания пирамиды проведена плоскость так, что величина угла между прямой AB и этой плоскостью равна $\pi/6$. Найдите площадь сечения.

45. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, длина стороны которого равна a. Плоскости боковых граней образуют с плоскостью основания пирамиды угол α. На сторонах AD и BC основания взяты точки E и F так, что $|AE|=2a/3$ и $|CF|=a/3$. Через эти точки

проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания пирамиды угол β. Найдите площадь получившегося сечения.

46. Из всех правильных треугольных призм, имеющих объем V, найдите призму с наименьшей суммой длин всех ее ребер. Чему равна длина стороны основания этой призмы?

47. В конус с высотой H и радиусом основания R вписан цилиндр так, что одно его основание лежит в плоскости основания конуса, а окружность другого основания принадлежит боковой поверхности конуса. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы его объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

48. Найдите радиус основания r и высоту h прямого кругового конуса, вписанного в шар радиуса R так, чтобы его объем был наибольшим.

49. Найдите конус наименьшего объема, описанный около шара радиуса R.

50. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса R (центр основания конуса лежит в центре шара).

51. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида так, что все ее вершины принадлежат сфере. Какой должна быть высота пирамиды, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

52. В конус с высотой H и радиусом основания R вписана правильная шестиугольная призма так, что одно ее основание лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого основания принадлежат боковой поверхности конуса. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема призмы.

53. Угол между боковым ребром и высотой правильной трсугольной пирамиды равен φ. В пирамиду вписан цилиндр, радиус основания и высота которого имеют одинаковую длину r. Одно из оснований цилиндра имеет по одной общей точке с каждой из боковых граней пирамиды, а другое лежит в плоскости ее основания. При каком значении φ объем пирамиды наименьший?

54. В прямой круговой конус вписана правильная треугольная пирамида, длина апофемы боковой гра-

ни которой равна k, а сама боковая грань составляет с плоскостью основания угол величиной α. Через одно из боковых ребер пирамиды проведена плоскость, пересекающая коническую поверхность. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью, если известно, что эта площадь имеет наибольшее из всех возможных значение.

§ 3. ОБЪЕМЫ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

1. Треугольник вращается вокруг стороны, длина которой равна a. Определите объем тела вращения, если величины прилежащих углов равны α и β.

2. Два равнобедренных треугольника ABC и ADC расположены по одну сторону от общего основания AC, равного b. Определите объем тела, образованного вращением фигуры $ABCDA$ вокруг основания AC, если $ACB=\alpha$, $ACD=\beta$ $(\alpha>\beta)$.

3. Длина меньшей стороны параллелограмма равна a, острый угол параллелограмма равен α, угол между меньшей диагональю и большей стороной равен β. Найдите объем тела, полученного вращением параллелограмма вокруг его большей стороны.

4. Фигура, ограниченная дугами парабол $y=x^2$ и $y^2=x$, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислите объем тела, которое при этом получается.

5. Найдите объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси ординат криволинейной трапеции, граница которой задана уравнениями $y^2=x$, $y=0$, $y=1$, $x=0$.

6. Найдите объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, граница которой задана уравнением а) $y=|x-1|-2$, $x=0$, $x=3$, $y=0$; б) $y=|x-1|-|x+1|$, $x=-2$, $x=2$, $y=0$; в) $y=x|x-2|$, $x=0$, $x=3$, $y=0$; г) $y=|x^2-3x|+2$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$; д) $y=\sqrt{1-x}$, $x=-3$, $x=1$, $y=0$.

7. Квадрат вращается вокруг оси, лежащей в его плоскости и проходящей только через одну из его вершин. При каком положении квадрата относительно оси объем получающегося тела вращения будет наибольшим?

ГЛАВА IX

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ

1. Даны два множества $M_1 = \{1;\ 2\}$ и $M_2 = \{a;\ 5\}$, $a \in R$. Найдите множества $A = M_1 \cup M_2$ и $B = M_1 \cap M_2$.

2. Докажите, что произведение трех последовательных натуральных чисел кратно 6.

3. Докажите, что число 1110987654312 не может быть квадратом целого числа.

4. Пусть m и n — взаимно простые натуральные числа ($n > m$). Найдите наибольший общий делитель, отличный от единицы, чисел $3n - m$ и $5n + 2m$, если известно, что он существует.

5. В секции гимнастики занимаются юноши и девушки, причем юношей в этой секции более 94%. Какое наименьшее число занимающихся может быть в этой секции?

6. Докажите, что $\log_2 5$ не является рациональным числом.

7. Пусть a, b, c — целые числа. Определите знак a, если известно, что числа $(-6)^{2n+2} a^{2n+3} b^{2n-1} c^{n+5}$ и $(-7)^{2n+1} a^n b^{2n+1} c^{n-8}$, $n \in N$, имеют одинаковые знаки.

8. Вычислите $a^4 + b^4 + c^4$, зная, что $a + b + c = 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

9. Докажите, что

а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in N$;

б) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, $n \in N$.

10. Найдите сумму

а) $S_n = 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in N$;

б) $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, $n \in N$.

11. Произведение двух положительных чисел равно единице. Докажите, что сумма этих чисел не меньше 2.

12. Произведение n положительных чисел равно 1. Докажите, что сумма этих чисел не меньше n.

13. Пусть x_1, x_2, x_3, ..., x_n — положительные числа. Докажите, что $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$.

14. Докажите неравенство $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n \in N$, $n > 2$.

15. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ $(n \in N)$ — числа одного и того же знака, большие -1. Докажите, что $(1+x_1)\times$ $\times(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_n$.

16. Докажите неравенство а) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $n\in N$; в) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots$ $\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{12}$.

17. Докажите, что при любом натуральном $n>1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}.$$

18. Докажите, что $|\sin n\alpha| \leqslant n\,|\sin\alpha|$ при любом $n \in N$.

19. Докажите, что а) $\operatorname{tg}(-314^\circ)>\frac{61}{59}$; б) $\ln\frac{7}{5}<\frac{11}{30}$.

20. Пусть D_1 и D_2 — области определения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. а) Найдите область D определения функции $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$;

б) При каком условии для области определения функции $f(x)$ выполняется равенство $D=D_1\cup D_2$?

21. Найдите значение $f(2)$, если для любого $x\neq 0$ выполняется равенство $2f(x)-3f(1/x)=x^2$.

22. Какая линия является графиком функции $y=$ $=f(f(f(x)))$, если $f(x)=1/(1-x)$?

23. Дан график функции $y=f(x)$ (см. рис. 23 на с. 226). Постройте график функции а) $y=|f(x)$; б) $y=$ $=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x))$; в) $y=\frac{1}{2}(|f(x)|-f(x))$; г) $y=f(|x|)$; д) $y=f(-|x|)$.

24. Функция $f(x)$ является возрастающей на интервале $]a;\ b[$. Можно ли утверждать, что функция $\varphi(x)=$ $=f^2(x)$ возрастает на этом же интервале?

25. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются убывающими на интервале $]a;\ b[$. Докажите, что функция $\varphi(x)=$ $=f_1(x)+f_2(x)$ убывает на интервале $]a;\ b[$.

26. Функция $f(x)$ является периодической с периодом T. Докажите, что число $T_1=nT$, где n — любое целое число, $n\neq 0$, также является периодом этой функции.

27. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены на всей числовой оси и не являются периодическими. Может ли функция $\varphi(x)=f_1(x)f_2(x)$ быть периодической?

28. Функция $f(x)$ определена на интервале $]-a; a[$. Докажите, что а) функция $\varphi_1(x)=f(x)+f(-x)$ — четная; б) функция $\varphi_2(x)=f(x)-f(-x)$ — нечетная.

29. Докажите, что всякую функцию $f(x)$, определенную на симметричном интервале $]-a, a[$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций

30. Докажите, что четная функция не может быть строго монотонной.

31. Найдите функцию, определенную на всей числовой оси и являющуюся одновременно четной и нечетной.

32. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены на симметричном промежутке $]-a; a[$. а) Докажите, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — четные функции, то функции $\varphi_1(x)=f_1(x)\pm f_2(x)$ и $\varphi_2(x)=f_1(x)f_2(x)$ являются четными;

б) докажите, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — нечетные функции, то функция $\varphi_3(x)=f_1(x)+f_2(x)$ — нечетная, а $\varphi_4(x)=f_1(x)f_2(x)$ — четная.

в) пусть $f_1(x)$ — нечетная функция, $f_2(x)$ — четная функция. Докажите, что $\varphi_5(x)=f_1(x)f_2(x)$ — функция нечетная.

33. Докажите, что четная функция $f(x)$ обратной функции не имеет.

34. Докажите, что периодическая функция $f(x)$ не имеет обратной функции.

§ 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Найдите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}$.
4. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(\dfrac{4}{x^2-x^{-1}}-\dfrac{1-3x+x^2}{1-x^3}\right)^{-1}+3\dfrac{x^4-1}{x^3-x^{-1}}\right]$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{5x-1}\cdot\dfrac{2x^3+1}{x^3+2x-1}\right)$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.
7. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.
8. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^3 x}$.
9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.
10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$.
11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$, $a\neq 0$, $a>b$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to a}\left\{\left[\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{x}}\right)^{-1}-\dfrac{2\sqrt[4]{ax}}{x^{3/4}-a^{1/4}x^{1/2}+a^{1/2}x^{1/4}-a^{3/4}}\right]^{-1}-\sqrt{2^{\log_2 a}}\right\}$.

16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x+2^{3-x}-6}{\sqrt{2^{-x}-2^{1-x}}}$. 17. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$.

18. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\pi/6)}$. 19. $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}$. 21. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 8x\operatorname{ctg} 3x$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+3x-1)\operatorname{tg} x}{x^2+2x}$. 23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin x-\operatorname{tg} x}{x^2\sin x}$. 25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{3x^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\cos 7(\pi-x)}{5(x-\pi)^n}$, $n=1,\ 2$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$. 29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

30. Найдите точки разрыва функции

а) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{если } x\neq 0,\\ -2, & \text{если } x=0;\end{cases}$

в) $f(x)=1+2^{1/x}$; г) $f(x)=(\sin x)/x$; д) $f(x)=x/\cos x$;

е) $f(x)=[x]$.

31. Дана функция $f(x)=5\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}$. Является ли эта функция непрерывной в точке $x=1$?

32. При каком значении A будет непрерывной в точке $x=2$ функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{если } x\neq 2,\\ A, & \text{если } x=2?\end{cases}$$

§ 3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1. Можно ли утверждать, что функция $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если а) функция $f_1(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $f_2(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не имеют производной в точке x_0?

2. Можно ли утверждать, что функция $\varphi(x) = f_1(x) f_2(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если а) функция $f_1(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $f_2(x)$ не имеет производной в точке x_0; б) обе функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не имеют производной в точке x_0?

3. Докажите, что производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная.

4. Докажите, что производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

5. Докажите, что производная дифференцируемой периодической функции есть функция периодическая с тем же периодом.

6. Дифференцируемая функция $f(x)$ такова, что $f(0) = 0$. Докажите, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0).$$

7. Дифференцируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(0) = g(0) = 0$, причем $g'(0) \neq 0$. Докажите, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

8. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, а справа от нее убывает?

9. Найдите все значения a, при которых функция $f(x)$ не имеет критических точек:

а) $f(x) = (a^2 - 3a + 2)\left(\cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4}\right) + (a - 1)x + \sin 1$;

б) $f(x) = (a^2 - 6a + 8)\frac{\sin(\pi + x)}{\sin(x + \pi/2)} + (a^2 - 7a + 12)(x - 2\sqrt{2})$;

в) $f(x) = (4a - 3)(x + \ln 5) + 2(a - 7)\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2}$.

10. Найдите критические точки функции

$$y = 2\sin^2\frac{x}{6} + \sin\frac{x}{3} - \frac{x}{3},$$

координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 - -10 < -19{,}5x$.

11. Найдите критические точки функции

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2\cos 2a + 3x\sin 2a\sin 6a + \sqrt{\ln(2a - a^2)}.$$

Убывает или возрастает $f(x)$ в точке $x = 1/2$?

12. Убывает или возрастает $f(x)$ в точке $x = \sin 8$, если $f(x) = -x^3/3 + x^2\sin 1{,}5a - x\sin a\sin 2a - -5\arcsin(a^2 - 8a + 17)$?

13. Найдите все значения a, при которых функция

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{a+4}}{1-a} - 1\right)x^6 - 3x + \ln 5$$

убывает для всех $x \in R$.

14. Существуют ли такие значения параметра b, при которых функция $f(x) = \left(1 - \frac{\sqrt{21 - 4b - b^2}}{b+1}\right)x^3 + +5x + \sqrt{6}$ является возрастающей в каждой точке ее области определения?

15. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\cos 3x$.

16. На графике функции $y = \frac{3}{\sqrt{2}}x\cdot\ln x$, где $x \in \in [e^{-1{,}5}; +\infty[$, найдите такую точку $M(x; y)$, чтобы отрезок касательной к графику функции в этой точке, заключенный между точкой M и осью Oy, имел наименьшую длину.

17. В какой точке $M(x; y)$ графика функции $y = =e^{-x}$ нужно провести касательную, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, была наибольшей?

18. Докажите, что кривая $y = x^4 + 3x^2 + 2x$ не пересекается с прямой $y = 2x - 1$, и найдите расстояние между их ближайшими точками.

19. При каких значениях a уравнение $ax^2 = \ln x$ имеет один корень?

§ 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

1. Дана непрерывная периодическая функция $f(x)$, $x \in R$. Можно ли утверждать, что первообразная этой функции является функцией периодической?

2. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-a; a]$, причем $f(x) = -f(-x)$ для любого $x \in [-a; a]$. а) Докажите, что всякая первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ есть функция четная;

б) докажите, что $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$;

в) вычислите интеграл $\int\limits_{-1}^{1} x^6 (\arcsin x)^7\,dx$.

3. Четная функция $f(x)$, $f(x) \not\equiv 0$, определена и непрерывна на отрезке $[-a; a]$. Какая из ее первообразных функций $F(x)$ является нечетной?

4. При каком условии значение интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ совпадает с величиной площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$?

5. На отрезке $[0; \pi]$ заданы функции $y = 1 + \cos x$ и $y = 1 + \cos(x - \alpha)$, где $0 < \alpha < \pi/2$. При каком значении α фигура, ограниченная линиями $y = 1 + \cos x$, $y = 1 + \cos(x - \alpha)$, $x = 0$, равновелика фигуре, ограниченной линиями $y = 1 + \cos(x - \alpha)$, $y = 1$, $x = \pi$?

6. При каких значениях параметра $a > 0$ площадь фигуры, ограниченной линиями $x = a$, $y = 2^x$, $y = 4^x$, больше либо равна площади, ограниченной линиями $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = a$?

7. Найдите критические точки функции $f(x)$, если

а) $f(x) = 1 + x + \int\limits_{1}^{x} (\ln^3 t + 2 \ln t)\,dt$. б) $f(x) = x - \ln x + \int\limits_{\eta}^{x} \left(\frac{1}{z} - 2 - 2\cos 4z\right) dz$.

8. На отрезке $[5\pi/4; 4\pi/3]$ найдите наименьшее значение функции

$$F(x) = \int\limits_{5\pi/4}^{x} (3 \sin t + 4 \cos t)\,dt.$$

9. На отрезке $[5\pi/3; 7\pi/4]$ найдите наибольшее значение функции

$$F(x) = \int_{5\pi/3}^{x} (6\cos u - 2\sin u)\,du.$$

10. Для функции $f(x) = 1 + 3^x \ln 3$ найдите первообразную $F(x)$, которая при $x = 2$ принимает значение 7. При каких значениях x кривая $F(x)$ пересекает ось абсцисс?

11. Почленным дифференцированием тождества $\sin 2x - 2\sin x \cos x$ докажите тождество $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

12. При каких положительных значениях a графики функций $f(x) = a|x+1|$ и $\varphi(x) = x + a^2|x|$ пересекаются в трех различных точках?

13. График функции $y = 1 - 3x^2$ пересекается в двух точках с прямой, наклоненной к оси Ox под углом φ. Вычислите абсциссу середины отрезка, соединяющего ортогональные проекции точек пересечения на ось Ox.

14. Найдите все значения φ, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (\sin\varphi - 1)x - \frac{1}{2}\cos^2\varphi = 0$ будет наибольшей.

15. При каких значениях параметра a из отрезка $[\pi; 11\pi/8]$ корни квадратного уравнения $x^2 + 2\sqrt{\sin 2a}\,x + \cos 2a = 0$ существуют и различны?

16. При каких значениях параметра a из отрезка $[7\pi/6; 7\pi/4]$ квадратный трехчлен $(\operatorname{ctg} a)x^2 + 2\sqrt{\operatorname{tg} a}\,x + \operatorname{tg} a$ принимает только положительные значения?

17. Найдите все значения параметра α, при которых квадратичная функция $(\sin\alpha)x^2 + (2\cos\alpha)x + (\cos\alpha - \sin\alpha)/2$ является квадратом линейной функции.

18. Найдите значения b, при которых уравнение $2\log_{\frac{1}{25}}(bx + 28) = -\log_5(12 - 4x - x^2)$ имеет только одно решение.

19. При каких a любое решение неравенства

$$\frac{\log_3(x^2 - 3x + 7)}{\log_3(3x + 2)} < 1$$

будет также решением неравенства $x^2 + (5 - 2a)x \leqslant 10a$?

20. Эквивалентны ли неравенства $f(x) > g(x)$ и $f'(x) > g'(x)$?

21. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} 2\operatorname{arctg} x + y - e^z = 3, \\ 4\operatorname{arctg} x - y - 2e^z = 0, \\ \operatorname{arctg} x + y + e^z = 3a + 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + \ln y^2 - 2\sin z = 0, \\ 3x - 2\ln y^2 + 4\sin z = 7, \\ x + \ln y^2 + \sin z = 3a + 2. \end{cases}$

22. Изобразите на координатной плоскости xOy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$x^3 + (3y + 1)x^2 + (4y + y^2)x + 5y^2 - 5y^3 = 0.$$

23. Найдите числа A, B, C такие, чтобы функция вида $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ удовлетворяла условиям

$$f'(1) = 8,\ f(2) + f''(2) = 33,\ \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{7}{3}.$$

24. Найдите числа K, L, M такие, чтобы функция вида $f(x) = \frac{Kx^2 + L}{x - 1} + Mx$ удовлетворяла условиям

$$f(2) = 23,\ f'(0) = 4 \text{ и } \int_{-1}^{0} (x - 1) f(x)\,dx = \frac{37}{6}.$$

25. Найдите числа P, Q, R такие, чтобы функция вида $f(x) = Pe^{2x} + Qe^x + Rx$ удовлетворяла условиям

$$f(0) = -1,\ f'(\ln 2) = 31,\ \int_0^{\ln 4} [f(x) - Rx]\,dx = 19{,}5.$$

26. Найдите графически решения системы

$$\begin{cases} x + y \leqslant 2, \\ x + y \geqslant 1, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

при которых сумма $z = 2x + 3y$ принимает наибольшее значение.

27. Найдите наименьшее значение функции $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 3y - 5$. При каких значениях x и y это наименьшее значение достигается?

28. Постройте график функции

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}},\quad x>0,\quad n\in N.$$

29. Найдите сумму корней уравнения $\cos 4x+6=-7\cos 2x$ на отрезке $[0;\ 314]$.

30. Найдите сумму $S_1(x)=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}$, а затем сумму $S_2(x)=2x+4x^3+\ldots+2n\cdot x^{2n-1}$.

31. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на части кривой $y=x^2-2x+3$, лежащей в первой четверти, заданы точка $A(x_1,\ y_1)$ с абсциссой $x_1=1$ и точка $B(x_2,\ y_2)$ с ординатой $y_2=11$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

32. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy к кривой $y=8/x^2$ проведена касательная в точке $A(x_0,\ y_0)$, где $x_0=2$, и эта касательная пересекает ось Ox в точке B. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OB}$.

33. При каких значениях c векторы $\vec{p}=(c\log_2 x;\ -6;\ 3)$ и $\vec{q}=(\log_2 x;\ 2;\ 2c\log_2 x)$ при любом $x\in\,]0;\ \infty[$ образуют тупой угол?

34. Найдите все значения α, при которых вектор $\vec{a}=(1;\ 3;\ \sin 2\alpha)$ составляет с осью Oz тупой угол, если известно, что векторы $\vec{b}=\left(\operatorname{tg}\alpha;\ -1;\ 2\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\vec{c}=\left(\operatorname{tg}\alpha;\ \operatorname{tg}\alpha;\ -\frac{3}{\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}}\right)$ ортогональны друг другу.

35. Из точки $A(1;\ 6)$ проведены касательные к окружности $x^2+y^2+2x-19=0$. Составьте уравнения этих касательных.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

1. $\{1\}$. 2. $\{-7\}$. 3. а) $\{c \mid c \in R\}$; б) $\varnothing$. 4. $\{a\}$ при $a \neq 0$; $\{c \mid c \in R\}$ при $a=0$. 5. $\{a \mid -2\}$ при $a \neq 2$; $\{c \mid c \in R\}$ при $a=2$.

6. $\left\{\frac{a^2-3a-4}{a-3}\right\}$ при $a \in]-\infty; -3[\cup]-3; 3[\cup]3; \infty[$; $\{c \mid c \in R\}$ при $a=-3$; $\varnothing$ при $a=3$. 7. а) $]3/7; \infty[$; б) $]-\infty; -5/4[$; в) $]-\infty; -7[$; г) $[3+2\sqrt{3}; \infty[$. 8. а) $]1/a; \infty[$ при $a \in]-\infty; 0[$, $]-\infty; \infty[$ при $a=0$, $]-\infty; 1/a[$ при $a \in]0; \infty[$; б) $]-\infty; 1/a[$ при $a \in]-\infty; 0[$, при $a=0$, $]1/a; \infty[$ при $a \in]0; \infty[$. 9. а) $]1/3; \infty[$; б) $]-\infty; 3/2[$; в) $]-1; 2[$; г) $\varnothing$. 10. $\{1; 2; 3; 4\}$. 11. а) $\{-2; 4\}$. ▲ По определению,

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{если } x-1 \geqslant 0, \\ -(x-1), & \text{если } x-1 < 0. \end{cases}$$

Поэтому уравнение имеет два решения: $x-1=3$, $x_1=4$ и $-(x-1)=3$, $x_2=-2$; б) $\varnothing$. 12. а) $\{3-a; 3+a\}$ при $a \in [0; \infty[$, $\varnothing$ при $a \in]-\infty; 0[$; б) $\{a-2; a+2\}$ при $a \in]-\infty; \infty[$.

13. а) $[3; \infty[$; б) $]-\infty; 3]$; в) $\{1,5\}$. 14. $\left\{-\frac{2}{3}; 4\right\}$. ▲ Исходное уравнение равносильно уравнению $|2x-1|^2=|x+3|^2$ или $(2x-1)^2-(x+3)^2=(2x-1+x+3)(2x-1-x-3)=0$, решая которое найдем корни. 15. $]-\infty; \infty[$ при $a=4$; $\{a/2+2\}$ при $a \neq 4$. 16. а) $\{-4,5; 4,5\}$. ▲ *1-й способ.* Будем искать решения уравнения на трех промежутках: 1) $x<-4$, 2) $-4 \leqslant x < 4$, 3) $4 \leqslant x < \infty$. На первом левая часть уравнения имеет вид $-(x-4)-(-1)(x+4)=9$, откуда $2x=-9$; $x=-4,5$ — корень уравнения. На втором промежутке левая часть уравнения имеет вид $-(x-4)+(x+4)=9$, откуда получаем $8=9$ (равенство ложное), поэтому на втором промежутке уравнение корней не имеет. Для третьего промежутка имеем $(x-4)+(x+4)=9$ или $2x=9$; $x=4,5$ — второй корень уравнения.

2-й способ. Функция $f(x)=|x-4|+|x+4|$ — четная. Пусть $x_0 \geqslant 0$ — корень уравнения, тогда $-x_0$ также корень уравнения. Решая теперь уравнение $-(x-4)+(x+4)=9$ на промежутке $0 \leqslant x < 4$ и $(x-4)+(x+4)=9$ на промежутке $4 \leqslant x < \infty$, найдем корень $x=4,5$. В силу четности функции $f(x)$ вторым корнем уравнения будет $x=-4,5$; б) $[-4; 4]$; в) $]-\infty; -4]$; г) $[4; \infty[$.

17. $\{-6;\ 2\}$. 18. $\{0\}$. 19. а) $]-\infty;\ \infty[$ при $a \in]-\infty;\ 0[$, $]-\infty;\ -a[\cup]a;\ \infty[$ при $a \in [0;\ \infty[$. ▲ При $a \in]-\infty;\ 0[$ неравенство выполняется при любом действительном x, так как $|x| \geqslant 0$ (по определению абсолютной величины числа). Для неотрицательных значений a исходное неравенство равносильно совокупности неравенств

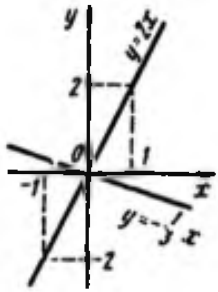
$$\left[\begin{array}{l} -x > a, \text{ если } x < 0; \\ x > a, \text{ если } x \geqslant 0; \end{array}\right.$$

объединение решений полученной совокупности и дает полное решение неравенства; б) $]-\infty;\ \infty[$; в) $]-\infty;\ 0[\cup]2;\ \infty[$. 20. а) $\varnothing$ при $a \in]-\infty;\ 0]$, $]-a;\ a[$ при $a \in]0;\ \infty[$. ▲ Для положительных значений a исходное неравенство равносильно системе неравенств

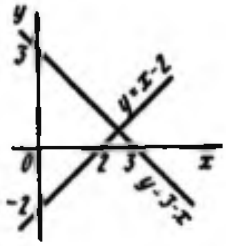
$$\left\{\begin{array}{l} -x < a, \\ x < a, \end{array}\right.$$

или неравенству $-a < x < a$; б) $\varnothing$; в) $]-4;\ 0[$. 21. а) $]-\infty;\ \infty[$; б) $[1,5;\ \infty[$. 22. $[-0,75;\ 2,5]$. 23. $]-\infty;\ -2[\cup]3;\ \infty[$. 24. $]2;\ \infty[$. 25. $]-\infty;\ -3[\cup]-1;\ 0]$. 26. а) $\{2\}$; б) $\{4/3\}$. 27. $\{-3\}$. 28. а) $]1;\ \infty[$; б) $]-\infty;\ 1[$. 29. $]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ 2[\cup]2;\ \infty[$; $(1/(m^2-4))(x-m)$. 30. Рассмотрите функцию $F(x) = k(kx+b)+b$.

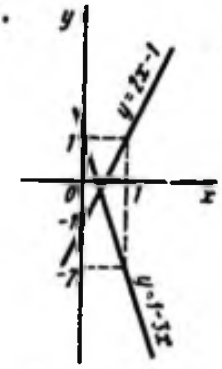
31.



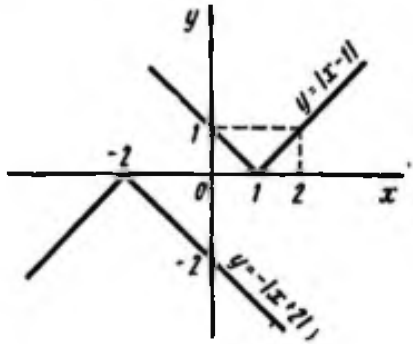
32.



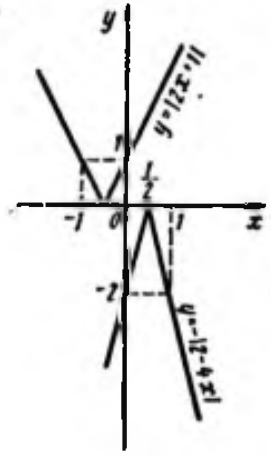
33.



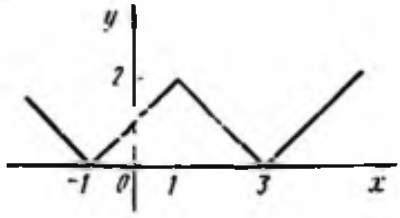
34.



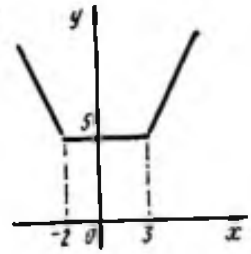
35.



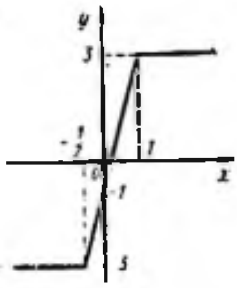
36.



37.

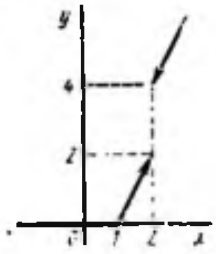


38.

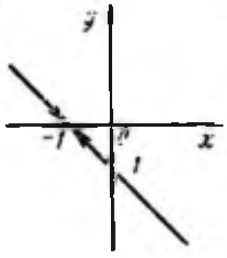


39.

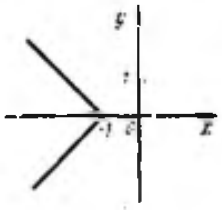
40.



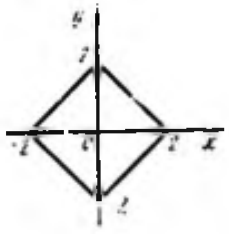
41.



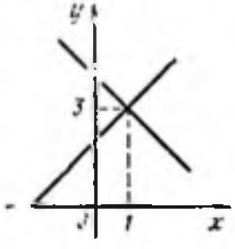
42.



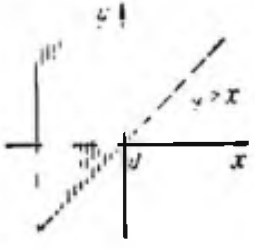
43.



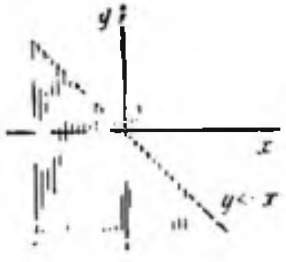
44.



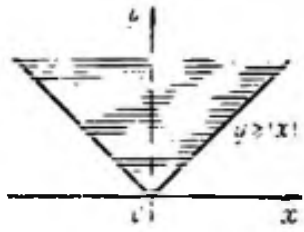
45.



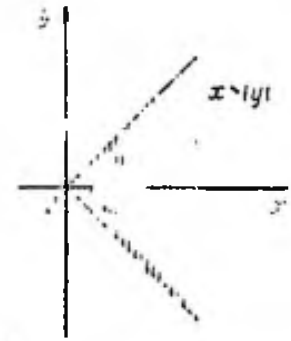
46.



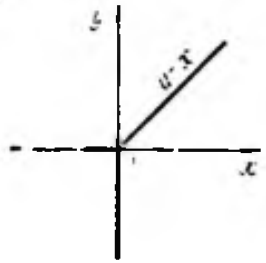
47.



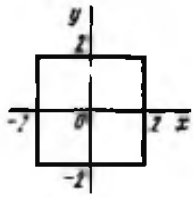
48.



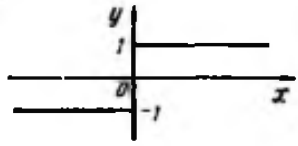
49.



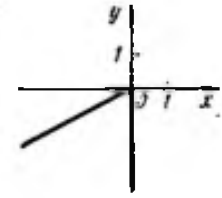
50.



51.



52.



53. ▲ Так как данная функция определена в окрестности точки $x=0$ и в самой этой точке $y(0)=1$, то, для того чтобы она была непрерывна в этой точке, необходимо, чтобы $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)=\lim\limits_{x\to 0}(-x+a)=1$, т. е. $a=1$. 54. в) $\{-1/3\}$. ▲ Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками функции*. Данная функция дифференцируема в каждой точке области определения (так как она определена на всей числовой оси, то все ее точки являются внутренними), кроме точки $x=1,3$, поэтому $x=1/3$ — критическая точка, а уравнение $y'=0$ не имеет решений; б) $]-\infty;\ -1]$. ▲ Представим заданную функцию в виде

$$y=\begin{cases}2x+2, & \text{если } x\geqslant -1,\\ 0, & \text{если } x<-1.\end{cases}$$

На интервале $]-1;\ \infty[$ $y'=2$, в точке $x=-1$ производная функции не существует, а на интервале $]-\infty;\ -1[$ $y'=0$ для всех точек интервала. Поэтому все точки луча $]-\infty;\ -1]$ являются критическими; в) $[-1;\ 1]$; г) $]-\infty;\ -3]\cup[3;\ \infty[$. 55. а) Убывает на $]-\infty;\ \infty[$; б) возрастает на $]-\infty;\ +\infty[$.

56. а) Убывает на $]-\infty;\ 4[$, возрастает на $]4;\ \infty[$; б) возрастает на $]-\infty;\ 0[$; убывает на $]0;\ \infty[$. 57. а) Возрастает на $]-\infty;\ -10[$, убывает на $]10;\ \infty[$; б) убывает на $]-5;\ 4[$; в) убывает на интервалах $]-\infty;\ -4[$, $]-3;\ -2[$ и $]-1;\ 0[$; возрастает на интервалах $]-4;\ -3[$, $]-2;\ -1[$ и $]0;\ \infty[$. 58. а) $x=1/2$ — точка минимума; б) $x=3/4$ — точка максимума. 59. а) $x=-2/3$ — точка минимума; б) $x=2$ — точка максимума.

● Исследуйте знак производных функций в окрестности каждой критической точки. 60. $x=-2$ — точка максимума. 61. $x=2$ — точка минимума при $a=2$. При других значениях a функция точек экстремума не имеет. ▲ Пусть $a<2$ (при $a>2$ решение аналогично). Тогда все точки отрезка $[a;\ 2]$ являются критическими, но ни в одной из них не выполняется достаточное условие экстремума. В случае $a=2$ функция $y=-2x-2$ имеет минимум в точке $x=2$ (в самой этой точке функция недифференцируема, но в окрестности ее дифференцируема; производная в левой окрестности отрицательна, а в правой — положительна). 62. $a\in[3;\ \infty[$. 63. $y_{\min}(1)=1-a$, $y_{\max}(2)=2-a$ при $a\in]-\infty;\ 1[$; $y_{\min}(2)=a-2$; $y_{\max}(1)=a-1$ при $a\in]2;\ \infty[$; $y_{\min}(a)=0$, $y_{\max}(2)=2-a$, $a\in]1;1,5[$; $y_{\min}(a)=0$, $y_{\max}(1)$ при $a\in]1,5;\ 2[$; $y_{\min}(1,5)=0$, $y_{\max}(1)=y_{\max}(2)=0,5$ при $a=1,5$.

§ 2. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

1. а) $\{3;\ 4\}$; б) $\{-1;\ 5\}$; в) $\{1/3;\ 1/2\}$; г) $\{-1/3;\ -3\}$; д) $\{1\pm\sqrt{6}\}$; е) $\left\{\frac{-1\pm\sqrt{65}}{4}\right\}$. 2. а) $]-\infty;\ -1[\cup]4;\ \infty[$; б) $[-1;\ 4]$; в) $]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ \infty[$; г) $\{-1/2\}$; д) $]-\infty;\ \infty[$; е) $\varnothing$. 3. а) $\{1/2\}$; б) $\{-1;\ 3\}$; в) $]-\infty;\ -3]\cup[3;\ 4[$; г) $[-5;\ 1]\cup\{5\}$; д) $\varnothing$; е) $\varnothing$; ж) $\{2\}\cup\left[2\frac{161}{163};\ 3\right]$.

4. в) 15. ● Используйте тождество $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2(x_1x_2)$; б) -22. ● Используйте тождество $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3(x_1x_2)\times(x_1+x_2)$; в) 127. 6. $\{1\}$. 9. $a\in]0;\ 4[$. ● Решите неравенство $(a^2-4a)/2<0$ ($(a^2-4a)/2=x_1x_2$, где x_1, x_2 — корни уравнения). 10. $a\in]-2;\ 2[$. 11. $k\in]-\infty;\ -1]$. ▲ Квадратное уравнение имеет действительные корни, если $D=[2(k-1)]^2-4(k+5)\geqslant 0$. Решением этого неравенства служит (объединение лучей) $]-\infty;\ -1]\cup[4;\ \infty[$. При этих значениях k корни могут быть оба положительными, разных знаков и оба отрицательными. Найдем значения k, при которых оба корня отрицательны. По теореме Виета имеем систему неравенств $x_1+x_2=-2(k-1)<0$, $x_1x_2=k+5>0$; решением последней является луч $[4;\ \infty[$. Таким образом, при всех $k\in]-\infty;\ -1[$ хотя бы один корень уравнения положителен. 12. а) $\left[-\sqrt[7]{\frac{40}{7}};\ -\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{13}-1}{2};\ \sqrt[7]{\frac{40}{7}}\right]$. ▲ Функция $f(x)=ax^2+bx+c$, $a>0$, будет иметь

оба корня x_1, x_2, меньшие некоторого числа x_0, если одновременно выполняются условия, которые для настоящей задачи будут выглядеть так:

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ -b/2a = \dfrac{x_1 + x_2}{2} < x_0, \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m^2 - 2 \cdot 4\,(m^2 - 5) \geqslant 0, \\ -m/4 < 1, \\ 2 \cdot 1^2 + m \cdot 1 + m^2 - 5 > 0. \end{cases}$$

Решая систему неравенств, получаем ответ; б) $\left[-\sqrt{\frac{40}{7}};\ \frac{-\sqrt{13}+1}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{13}}{2};\ \sqrt{\frac{40}{7}}\right]$. 13. $]-2;\ 3[$. 14. $]6;\ 6{,}75[$.

▲ Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, имеет корни x_1, x_2, заключенные между числами p и q, тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac > 0, \\ f(p) > 0,\ f(q) > 0, \\ p < -\dfrac{b}{2a} < q \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} [2(k-3)]^2 - 4 \cdot 9 > 0, \\ (-6)^2 + 2(k-3)(-6) + 9 > 0, \\ 1^2 + 2(k-3) \cdot 1 + 9 > 0, \\ -6 < -(k-3) < 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем ответ. 15. $]5;\ 24[$. 16. $[0;\ 4/6[$. 17. $]2{,}5;\ \infty[$. 18. а) $\{-2;\ 2\}$. ▲ Исходное уравнение равносильно совокупности систем

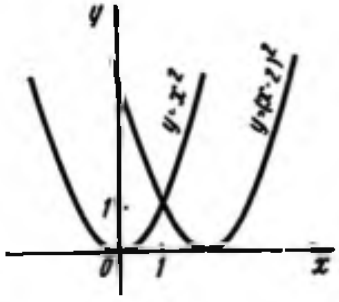
$$\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x < 0. \end{cases}$$

Решениями уравнения первой системы являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Значение x_1 не удовлетворяет неравенству этой системы, поэтому здесь только одно решение $x = 2$. Аналогично находится решение $x = -2$ второй системы; б) $\varnothing$. 19. а) $\{(-5 \pm \sqrt{41})/4;\ 1/2;\ 2\}$; б) $\{(-1 \pm \sqrt{5})/2\}$. 20. а) $]-\infty;\ -3] \cup [2;\ \infty[$; б) $[1/3;\ 1/2]$; в) $]-\infty;\ -1] \cup [0;\ \infty[$; г) $\varnothing$. 21. а) $\{(1 \pm \sqrt{17})/2\}$; б) $\{(1 \pm \sqrt{17})/2\}$. 22. а) $\varnothing$; б) $\{(1 \pm \sqrt{13})/3\}$. 23. $\{-2/5;\ 2\}$. 24. а) $]-4;\ 4[$. ▲ Исходное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

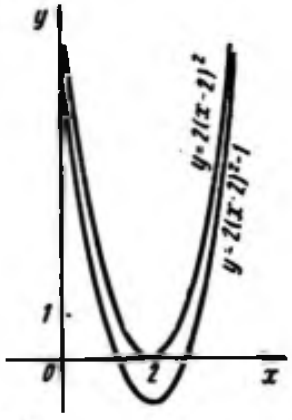
$$\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + x - 12 < 0, \\ x < 0. \end{cases}$$

Решениями первой системы являются $x \in [0;\ 4[$, а второй системы $-x \in]-4;\ 0[$. Объединив эти решения, получим ответ; б) $]-\infty;\ -3] \cup [3;\ \infty[$; в) $[-5;\ -2] \cup [2;\ 5]$; г) $]-\infty;\ \infty[$; д) $\varnothing$. 25. а) $]-\infty;\ -(5+\sqrt{34})/3[\cup](\sqrt{34}-5)/3;\ 1/3[\cup]3;\ \infty[$; б) $[-2;\ 1]$. 26. а) $]-\infty;\ -5] \cup [4;\ \infty[$; б) $]0;\ 1/2[$; в) $[-4;\ -2]$. 27. а) $]-\infty;\ 1[\cup]2+\sqrt{11};\ \infty[$; б) $]-3;\ 0[\cup]1;\ 2[$. 28. а) $]-\infty;\ -4[\cup]-3;\ (9-\sqrt{465})/6[\cup](9+\sqrt{465})/6;\ \infty[$; б) $[-5/3;\ 5/3]$. 29. а) $\{0\}$; б) $[-1;\ 1]$; в) $]-\infty;\ 1] \cup [3;\ \infty[$; г) $]-\infty;\ -4[\cup]0;\ \infty[$; д) $[-4;\ -1] \cup [0;\ 4]$; е) $]-3;\ -1] \cup \{0\} \cup [1;\ 3[$. 31. $[5;\ \infty[$. 32. а) $3 - \sqrt{8+x}$; б) $3 + \sqrt{8+x}$.

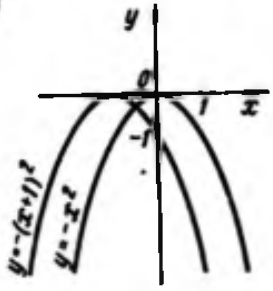
33. а); б)



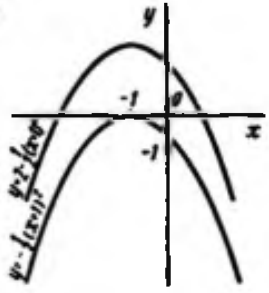
33. в); г)



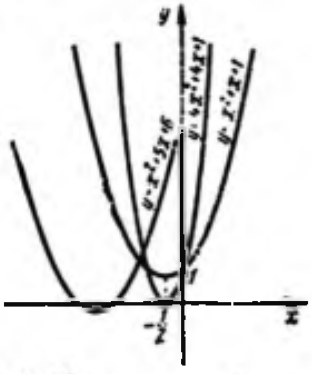
34. а); б)



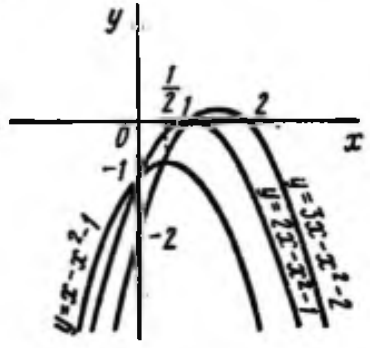
34. в); г)



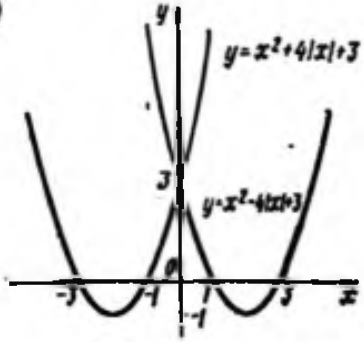
35.



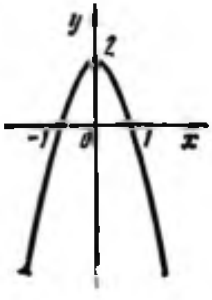
36.



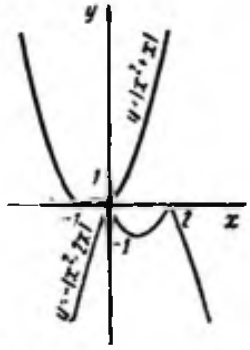
37. а); б)



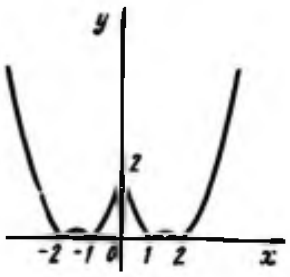
37. в)



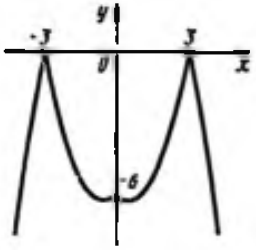
38.



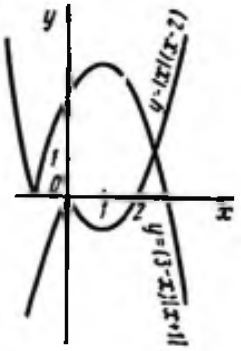
39. а)



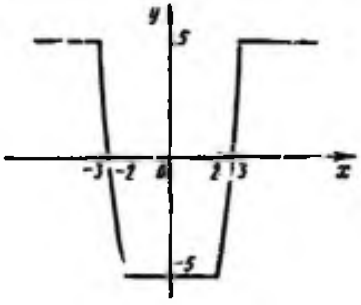
39. б)



40.



41.



42. а) $2x-6$; б) $-2x-1$; в) $6x+1$; г) $-8x-\operatorname{tg} 2$; д) $x-\sqrt{3}$; е) $-2x/3+\pi$; ж) $10(5x+1)$; з) $4-x/2$; и) $2ax$; к) $2(a-1)x-a$. 43. а) -3; б) 7; в) 0; г) 1. 44. а) $\operatorname{arctg} 9$; б) $\pi-\operatorname{arctg} 4$; в) $\pi/3$; г) $3\pi/4$; д) $\pi-\operatorname{arctg} 13$. 45. а) $y=1-6x$; б) $y=-3x+3{,}5$; в) $y=4$. 46. 0,5. 47. $(2a;\ 4a^2)$. ▲ Ординаты точек параболы с абсциссами x_1 и x_2 суть $y_1=a^2$ и $y_2=9a^2$. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$, будет таким: $\dfrac{x-a}{3a-a}=\dfrac{y-a^2}{9a^2-a^2}$, или $y=4ax-3a^2$. Таким образом, прямая имеет угловой коэффициент $k=4a$. Дифференцируя функцию $y=x^2$ и полагая $y'(x_0)=2x_0=k=4a$, получаем: $x_0=2a$, $y_0=(2a)^2=4a^2$. 48. $y=1$. 49. $y=-8$. 50. а) 17; б) $]-\infty;\ 17[$. 51. а) $\{3\}$; б) $\{2\}$; в) $\{-5\}$; г) $\{5\}$. 52. а) $\{-1/2;\ 0;\ 1/2\}$; б) $\{-3;\ 1/4\}$. 53. а) $\{1;\ 3;\ 5\}$; б) $\{-4;\ -2;\ 0\}$; в) $\{-1\}$. 54. а) $\{-3;\ -2;\ 1/2;\ 2\}$;

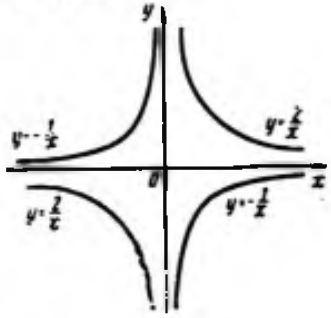
б) $[-\sqrt{3}; -1] \cup \{0\} \cup [1; \sqrt{3}]$. 55. а) $\{1; 2\}$; б) $\{1; 3\}$; в) $\{2\}$. 56. а) $]-\infty; 1{,}5[$; б) $]-2; \infty[$; в) $]-\infty; -1[\cup]0; 1[$; г) $]-\infty; -2[\cup]-1; 0[\cup]2; \infty[$. 57. а) $]-1{,}5; \infty[$; б) $]-\infty; 2[$; в) $]-\infty; -0{,}5[$; г) $]-(1+\sqrt{17})/2; -1/2[\cup](\sqrt{17}-1)/2; \infty[$. 58. а) $x=0$ — точка минимума; б) $x=0$ — точка максимума; в) $x=1$ — точка минимума; г) $x=-2$ — точка максимума; д) $x=-1$ — точка минимума; е) $x=1/8$ — точка максимума. 59. а) Функция точек экстремума не имеет; б) $x=-1{,}5$ — точка минимума; в) $x=-1$ — точка максимума, $x=0{,}5$ — точка минимума. ▲ Имеем $y=-(x-2)(x+1)$ при $x<-1$, и в этой области $y'=1-2x$, причем $y'>0$ для всех $x \in]-\infty; -1[$; при $x>-1$ $y=(x-2)\times(x+1)$, $y'=2x-1$ и $y'<0$ для $x \in]-1; 1/2[$. В точке $x=-1$ производной функции не существует (точка $x=-1$ — критическая), но в ее окрестности производная функции существует и меняет знак с плюса на минус при переходе через эту точку. Следовательно, $x=-1$ — точка максимума; $y'(1/2)=0$ и для $x \in \left]\frac{1}{2}; \infty\right[$ $y'>0$, поэтому $x=1/2$ — точка минимума. 60. а) $x=-1{,}5$ и $x=1{,}5$ — точки минимума; $x=0$ — точка максимума; б) $x=0$ — точка минимума; в) $x=-0{,}5$ — точка минимума. 61. а) $x=-4$, $x=-2$, $x=2$, $x=4$ — точки минимума; $x=-3$, $x=0$, $x=3$ — точки максимума; б) $x=(-\sqrt{65}-1)/2$, $x=4$ — точки минимума; $x=-0{,}5$ — точка максимума. 62. а) функция не имеет точек экстремума; б) $x=0$ — точка максимума. 63. а) $y_{\min}=y(1)=7$, $y_{\max}=y(2)=15$; б) $y_{\max}=y(2)=-14$, $y_{\min}=y(3)=-29$; в) $y_{\max}=y(-1)=8$, $y_{\min}=y(1)=4$; г) $y_{\min}=y(0)=-1$, $y_{\max}=y(3)=8$.
64. а) $y_{\max}=y(-3)=10$, $y_{\min}=y(-1)=2$; б) $y_{\min}=y(1)=-2$, $y_{\max}=y(4)=2$; в) $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\max}=y(2)=4$. 65. ● Докажите, что $x_1<-b/(2a)<x_2$. 66. ● Рассмотрите функцию $\varphi(x)=f(x)-A$, у которой x_1 и x_2 являются нулями и используйте равенство $\varphi'(x)=f'(x)$ и указание в ответе к задаче 65 этого параграфа. 67. $(x_1+x_2)/2$.

§ 3. ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

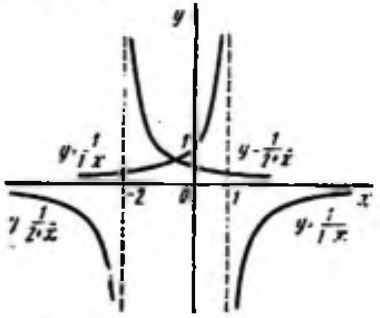
1. а) $\{1/5\}$; б) $\varnothing$; в) $\{4/a-2\}$ при $a \in]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$; $\varnothing$ при $a=0$; г) $\{1/a+2; -1/a+2\}$ при $a \in]0; \infty[$; $\varnothing$ при $a \in]-\infty; 0]$. 2. а) $\{-2\}$; б) $\varnothing$; в) $\{-1; 3\}$; г) $\{(a+3)/2\}$ при $a \in]-\infty; -1[\cup]-1; 3[\cup]3; \infty[$; $\varnothing$ при $a \in \{-1; 3\}$ 3. а) $]0; 1[$; б) $]-\infty; 0[\cup]1; \infty[$; в) $]-\infty; 1[\cup]2; \infty[$; г) $]-3{,}5; -3[$; д) $]1+a; 1[$ при $a \in]-\infty; 0[$, $\varnothing$ при $a \in \{0\}$, $]1; 1+a[$ при $a \in]0; \infty[$; е) $]-\infty; -1[\cup]-1-a; \infty[$ при $a \in]-\infty; 0[$; $]-\infty; -1[\cup]-1; \infty[$ при $a \in \{0\}$, $]-\infty; -1-a[\cup]-1; \infty[$ при $a \in]0; \infty[$. 4. а) $]-\infty; -3[\cup]1; \infty[$; б) $\left]-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right[$. 5. а) $[1; 4[\cup]4; \infty[$. ● Разложите числитель дроби на множители; б) $\left]-\infty; -3[\cup]-3; -\frac{1}{3}\right[$.
6. а) $]-\infty; -4[\cup]0; \infty[$; б) $]-\infty; -4[\cup]8/7; 2[\cup]2; \infty[$.

▲ Так как части неравенства положительны, то при $x \neq 0{,}5$ и $x \neq 2$ оно равносильно неравенству $\frac{x-2}{2} < \frac{2x-1}{3}$. Возводя последнее неравенство в квадрат и перенося все члены в левую часть, после преобразований (примените формулу для разности квадратов) получаем неравенство $(7x-8)(x+4) > 0$, решая которое находим ответ: в) $]-\infty; 11/4[\cup]7/2; \infty[$. ● Положите $|x-2| / |x-3| = y$, $y \geqslant 0$; г) $]-\infty; 2[$, $a \in]-\infty; 0[\cup]\frac{2}{3}; \infty[$, $]2; \infty[$ при $a \in]0; 2/3[$; ⊘ при $a \in \{2/3\}$.

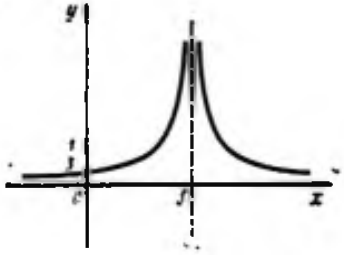
7. а); б)



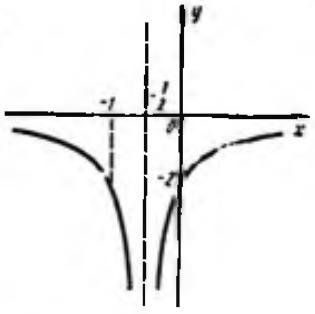
7. в); г)



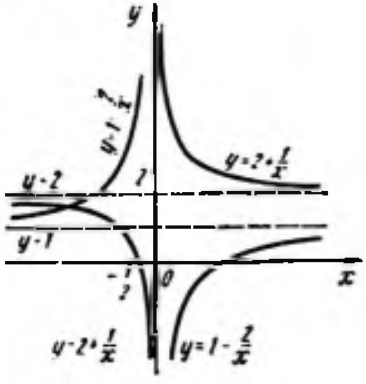
8. а)



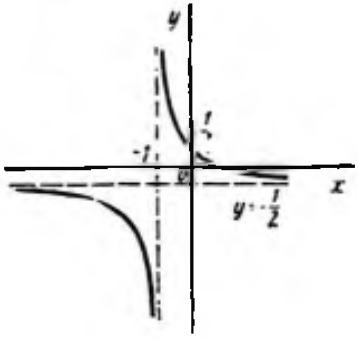
8. б)



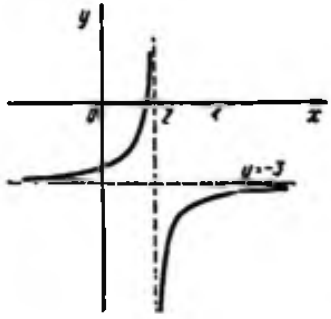
9. а); б)



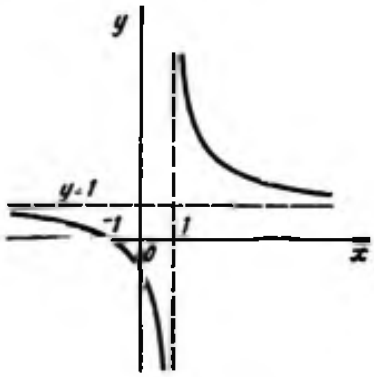
9. в)



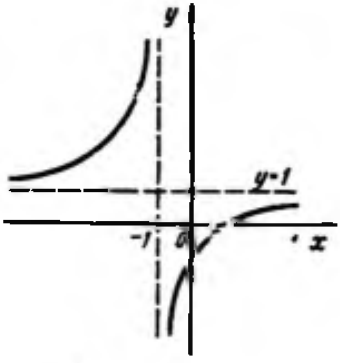
9. г)



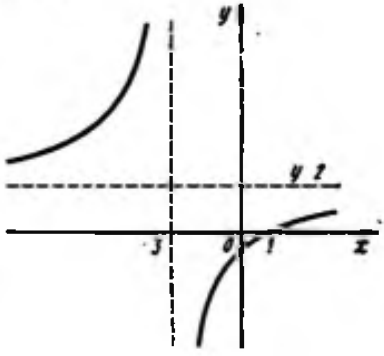
10. а)



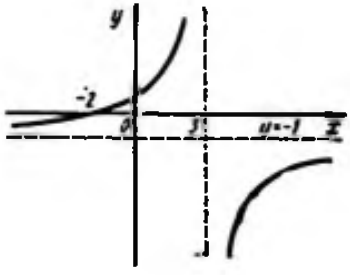
10. б)



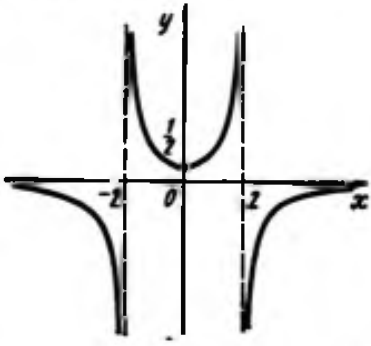
10. в)



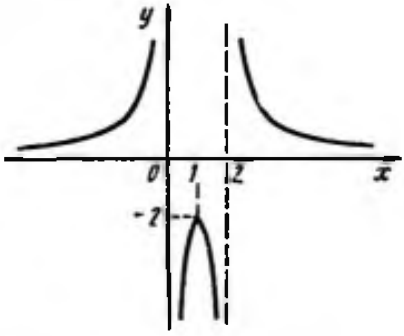
10. г)



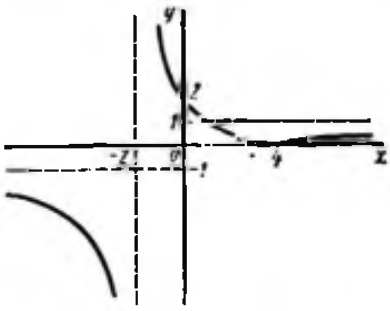
11. а)



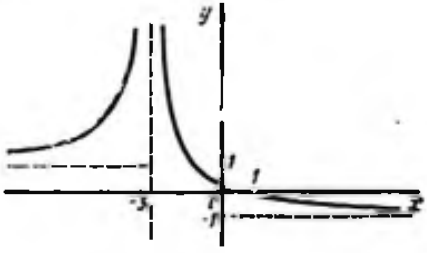
11. б)



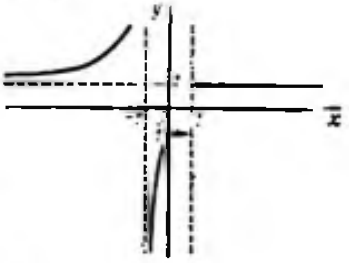
12. а)



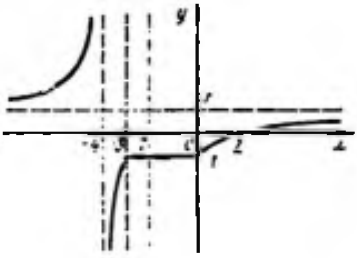
12. б)



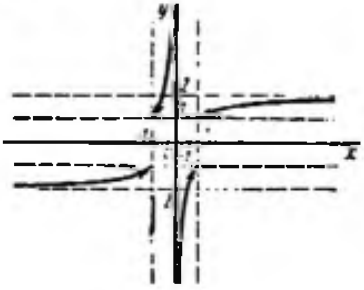
13. а)



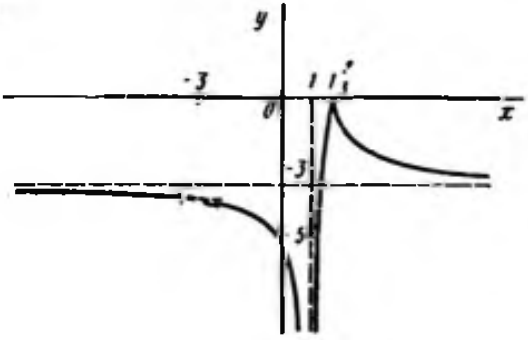
13. б)



14. а)



14. б)



15. а) $-\frac{1}{x^2}$; б) $\frac{2}{x^3}$; в) $-\frac{1}{2(x+1)^2}$; г) $\frac{1}{(1-x)^2}$; д) $\frac{2}{(x+2)^2}$; е) $-\frac{2}{(2x-1)^2}$; ж) $\frac{5}{(x+1)^2}$; з) $-\frac{11}{(1-3x)^2}$. 16. а) -3; б) $1/4$; в) -1; г) -1. 17. а) $\pi/4$; б) $\operatorname{arctg}\frac{5}{9}$; в) $\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{9}$; г) $\pi-\operatorname{arctg}4$; д) $\pi-\operatorname{arctg}\frac{5}{4}$; е) $\pi-\operatorname{arctg}6$. 18. а) $x-3y-6=0$; б) $y+x=0$; в) $4y-5x+6=0$; г) $36y+29x-23=0$. 19. а) $M_1(0;-1)$; $M_2(-2;3)$; б) $M_1(-1/2;-3)$; $M_2(-3/2;5)$. ◎ Используйте условие перпендикулярности прямых $k_1k_2=-1$, где k_1 и k_2 — угловые коэффициенты. 20. ● Покажите, что $y'(0)=-y'(4)$. 21. $y+x=0$; $x+25y=0$. ▲ Уравнение прямой, проходящей через начало координат, имеет вид $y=kx$. Пусть $M(x_0;y_0)$ — точка гиперболы, через которую проходит касательная. Тогда $kx_0=(x_0+9)/(x_0+5)$ и $k=y'(x_0)=-4/(x_0+5)^2$. Исключая из этих уравнений k, получаем уравнение $x_0^2+18x_0+45=0$, из которого найдем $x_{01}=-15$, $x_{02}=-3$ и соответственно $k_1=-1/25$ и $k_2=-1$. 22. ◎ Исследуйте знак производной на интервале и покажите, что $y'(x_0)\neq 0$ для любого $x_0\in]x_1;x_2[$. 23. в) $y_{\min}(0)=-3$, $y_{\max}(2)=-1/3$; б) $y_{\max}(-1)=1/3$, $y_{\min}(1)=-3$. 24. $x_0=\sqrt{x_1x_2}$, если $x_1>0$, и $x_0=-\sqrt{x_1x_2}$, если $x_2<0$.

§ 4. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ. РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

1. а) $\{-3;-1;1\}$; б) $\{-3/2\}$; в) $\{-3\}$; г) $\{1/2\}$; д) $\{1\}$; е) $\{-2\}$; ж) $\{-1\}$; з) $\{2\}$; и) $\{-1\}$; к) $\{1\}$. ● а)—к). Разложите левую часть уравнения на множители. 2. ▲ Пусть $x_1=p/q$, где $p\in Z$, $q\in N$ и p и q — взаимно простые числа. Тогда $\frac{p^3}{q^3}+a\frac{p^2}{q^2}+b\frac{p}{q}+c=0$, или $p(p^2+apq+bq^2)=-cq^3$. Правая часть последнего равенства кратна q. Левая часть будет делиться на q тогда и только тогда, когда $q=1$, так как $p^2+apq+bq^2$ на q не делится (два слагаемых кратны q, а третье p^2 — нет). Следовательно, последнее равенство имеет вид $p(p^2+ap+b)=-c$, а отсюда следует, что c кратно $p=x_1$. 3. а) $\{-2;-1;1\}$. ▲ Свободный член данного уравнения равен -2, поэтому рациональными корнями могут быть лишь числа ± 1; ± 2. Подставляя $x=1$ в уравнение, получаем $1^3+2\cdot 1^2-1-2=0$, т. е. 1 — корень уравнения. Разлагая теперь левую часть на множители, имеем $x^3-1^3+2x^2-2\cdot 1^2-x+1=(x-1)(x^2+x+1)+2(x-1)(x+1)-(x-1)=(x-1)(x^2+3x+2)=0$. Решая уравнение $x^2+3x+2=0$, найдем другие корни исходного уравнения; б) $\{-3;2\}$. *Замечание.* Данное уравнение имеет два равных корня: $x=2$. Такие корни называются кратными. Корень $x=2$ — корень кратности 2; в) $\{3\}$; г) $\{1\}$; д) $\{-1;-1/2;1/3\}$. ◎ Положите $x=-1/y$; е) $\{1/2\}$. ● Умножьте уравнение на 4 и положите $2x=y$. 4. ◎ Используйте тождество $a(x-x_1)(x-x_2)\times\times(x-x_3)=ax^3+bx^2+cx+d$. 5. $-2p$.

6. $\left\{\sqrt[3]{(\sqrt{13}+3)/2}-\sqrt[3]{(\sqrt{13}-3)/2}\right\}$. ▲ Положим $x=y-1/y$. Тогда уравнение примет вид

$$y^3-\frac{1}{y^3}-3\left(y-\frac{1}{y}\right)+3\left(y-\frac{1}{y}\right)-3=0, \text{ или } y^3-\frac{1}{y^3}-3=0.$$

Полагая теперь $y^3=t$, придем к уравнению $t^2-3t-1=0$. Последнее имеет корни $t_1=(\sqrt{13}+3)/2$, $t_2=(3-\sqrt{13})/2$, $(t_1t_2=-1)$. Отсюда получим $y_1=\sqrt[3]{t_1}$ и

$$x_1=\sqrt[3]{t_1}-\frac{1}{\sqrt[3]{t_1}}=\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{2}{3+\sqrt{13}}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{13}+3}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}.$$

Проверьте самостоятельно, что $x_2=\sqrt[3]{t_2}-1/\sqrt[3]{t_2}=x_1$.

7. а) $\{-3;\ -2;\ 1;\ 3\}$; б) $\{-5;\ -2;\ 1;\ 2\}$; в) $\{(1\pm\sqrt{13})/2\}$; г) $\varnothing$; д) $\{-2;\ 1;\ 2;\ 4\}$. ● Разложите левую часть уравнения на множители; е) $\{-5;\ -2\}$. ● Многочлен x^4+11x^2+10 разложите на два множителя. 8. ● См. решение задачи 2 этого параграфа. 9. а) $\{-5;\ -1;\ 1;\ 3\}$; б) $\{2;\ 6\}$; в) $\{-1\}$; г) уравнение не имеет рациональных корней; д) $\{-1/3;\ 1/2\}$. ● Положите $x=-1/y$. 10. а) $\{-\sqrt{2};\ -1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2};\ \sqrt{2}\}$. ● Положите $x^2=y$; б) $\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$. 11. а) $\{-1;\ 1\}$; б) $\{2\}$. ▲ Полагая $2x-3=y+c$ (1) и $2x-5=y-c$ (2), получаем уравнение $(y+c)^4+(y-c)^4=2$. (3) Постоянная c определяется из уравнений (1) и (2): $c=1$. После преобразований уравнение (3) примет вид $y^4+6y^2=0$. Последнее имеет единственный корень $y=0$. Далее имеем $2x-3=1$, $x=2$. *Замечание.* Уравнения вида $(ax+b_1)^4+(ax+b_2)^4=k$ подстановкой $ax+b_1=y+c$, $ax+b_2=y-c$, где $c=(b_1-b_2)/2$, сводятся к биквадратным.

12. а) $\{-1-\sqrt{7};\ -1-\sqrt{2};\ -1+\sqrt{2};\ \sqrt{7}-1\}$. ● Положите $x^2+2x=y$; б) $\{-1/2;\ 1\}$.

13. а) $\{(-a(1+\sqrt{13}))/2;\ (+a(\sqrt{13}-1))/2 \mid a\in R\}$. ● Положите $x^2+ax=y$; б) $\{(-5-\sqrt{21})/6;\ (\sqrt{21}-5)/6\}$.

14. а) $\{-\sqrt{2};\ 4-\sqrt{18};\ \sqrt{2};\ 4+\sqrt{18}\}$. ▲ Положим $x-2/x=y$, тогда $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2=x^2+\frac{4}{x^2}-4=y^2$, откуда $x^2+\frac{4}{x^2}=y^2+4$. Теперь исходное уравнение принимает вид $y^2-8y=0$. Корни этого уравнения $y_1=0$, $y_2=8$. Решая далее уравнения $x-2/x=0$, $x-2/x=8$, которые сводятся к квадратным, получаем ответ; б) $\{-3/2;\ -(1+\sqrt{7})/4;\ (\sqrt{7}-1)/4;\ 1\}$. ● Поделите уравнение на x^2 и положите $2x-3/x=y$; в) $\{1/2;\ 2\}$. ● Сократите дробь в левой части уравнения на $x+1$;

г) $\{-1;\ 9;\ (5-\sqrt{61})/2;\ (5+\sqrt{61})/2\}$. ● Поделите уравнение на x^2 и положите $x-9/x=y$. 15. а) $\{(1-\sqrt{21})/2;\ (1+\sqrt{21})/2\}$. ▲ Вычитая из обеих частей уравнения $10x^2/(x+5)$, после преобразований получаем $(x^2/(x+5))^2+10x^2/(x-5)-11=0$. Пусть $x^2/(x+5)=y$, тогда $y^2+10y-11=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=-11$.

Таким образом, имеем два уравнения: $x^2/(x-5)=1$ и $x^2/(x+5)=-11$, решив которые получим ответ (второе уравнение не имеет действительных корней); б) $\{-1-\sqrt{7};\ \sqrt{7}-1\}$. ◎ Приведите уравнение к виду

$$\frac{x^2}{x-3}\cdot\frac{2}{}-6\frac{x^2}{x-3}-16=0 \text{ и положите } \frac{x^2}{x-3}=y.$$

16. а) $\left\{-\left(1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)/\sqrt{2};\ \left(\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1\right)/\sqrt{2}\right\}$. ◎ Приведите уравнение к виду $(x^2+1)^2-2(x-1)^2=0$;

б) $\left\{-\sqrt{2}/\left(\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right);\ \sqrt{2}/\left(\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1\right)\right\}$. ◎ Положите $x=1/y$; в) $\{-9;\ 11\}$. ◎ Прибавьте к обеим частям уравнения $4x^2+400x+1$. 17. а) $\{-a;\ a-\sqrt{a^2+2};\ a+\sqrt{a^2+2}\ \ a\in R\}$. ▲ Решим данное уравнение относительно a. Имеем

$$a=\frac{-(x^2+2)+(3x^2-2)}{4x}=\frac{x^2-2}{2x}, \qquad (1)$$

или

$$a=\frac{-(x^2+2)-(3x^2-2)}{4x}=-x. \qquad (2)$$

Решив теперь уравнения (1) и (2) относительно x, получим ответ; б) $\{-1-\sqrt{3+a};\ -1+\sqrt{3+a}\}$ при $a\in[-3;\ -1[$, $\{-1-\sqrt{3+a};\ \sqrt{3+a}-1;\ -1-\sqrt{1+a};\ \sqrt{1+a}-1\}$ при $a\in[-1;\ \infty[$, $\varnothing$ при $a\in]-\infty;\ -3[$. ▲ Решим данное уравнение относительно a, считая x параметром: $a^2-2(x^2-1)a+x^4-6x^2+4x=0$;

$$a=x^2+2x-2 \quad (1) \quad \text{или} \quad a=x^2-2x \quad (2).$$

Решая уравнения (1) и (2) относительно x, получаем $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3+a}$, $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{1+a}$. Корни x_1 и x_2 будут действительными, если $a\in[-3;\ \infty[$, а x_3 и x_4 — если $a\in[-1;\ \infty[$. 18. $\{(1-\sqrt{29})/2;\ (5-\sqrt{17})/2;\ (1+\sqrt{29})/2;\ (5+\sqrt{17})/2\}$. ▲ Представим левую часть уравнения в виде $(x^2+ax+c)(x^2-bx+d)=0$, или $x^4+(a+b)x^3+(ab+c+d)x^2+(bc+ad)x+cd=x^4-4x^3-10x^2+37x-14$. Имеем систему

$$a+b=-4,\quad ab+c+d=-10,\quad bc+ad=37,\quad cd=-14.$$

Так как a, b, c, d — целые числа, то из последнего уравнения системы следует, что либо $c=-1$, $d=14$, либо $c=2$, $d=-7$. Системе полностью удовлетворяет вторая пара значений c и d; при этих значениях для других коэффициентов получаются значения $a=-5$, $b=1$. Решив теперь уравнения $x^2-5x+2=0$ и $x^2-x-7=0$, найдем корни исходного уравнения. 19. а) $]-2;\ 1[\cup]3;\ \infty[$. ▲ При $x\in]3;\ \infty[$ все сомножители, входящие в произведение, положительны, следовательно, $p(x)=(x+2)(x-1)(x-3)>0$ при всех $x\in]3;\ \infty[$; при $x\in]1;\ 3[$ сомножитель $x-3$ отрицателен (один), а каждый из сомножителей $(x-1)$ и $(x+2)$ положителен. Поэтому $p(x)<0$ при $x\in]1;\ 3[$, при $x\in]-2;\ 1[$ имеет два отрицательных сомножителя ($(x-3)$ и $(x-1)$) и один положительный $(x+2)$. Значит, $p(x)>0$ при

$x \in]-2; 1[$; при $x \in]-\infty; -2[$ все три сомножителя отрицательны, поэтому $p(x) < 0$ на этом промежутке. Объединяя промежутки, где $p(x) > 0$, получаем ответ; б) $]-2; 0[\cup]1; 2[$; в) $[-4; -2] \cup \{1\}$; г) $]-3; 2[$ при $n = 2k-1$, $k \in N$, $]-\infty; -3[\cup]-3; 2[$ при $n = 2k$, $k \in N$. 20. а) $]-3; 2[\cup]4; \infty[$; б) $]-\infty, -2] \cup \{-1\}$; в) $\left]\frac{1}{2}; \infty\right[$. 21. а) $]-\infty; -1] \cup \{1\} \cup [2; \infty[$; б) $]-5; -1[$. 22. а) $]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; \infty[$; в) $\left]2-4/\sqrt{3}; 1[\cup]1; 2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right[$. ● Положите $x-2=y$.

23. а) $]-\infty; \infty[$. ● Положите $x^2-x=y$;

б) $]-(3+\sqrt{33})/2; (\sqrt{33}-3)/2[$. ● Положите $x^2+3x+1=y$.

24. а) $]1+\sqrt{3}-\sqrt{3+2\sqrt{3}}; 1+\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}[$. ▲ Исходное неравенство равносильно неравенству $p(x) = x^4-4x^3-6x^2-4x+1 < 0$. Разложим многочлен в левой части неравенства на множители, для этого решим уравнение $p(x)=0$. Так как $x=0$ не удовлетворяет данному уравнению, то оно равносильно уравнению $x^2+1/x^2-4(x+1/x)-6=0$. Полагая теперь $x+1/x=y$, получаем уравнение $y^2-4y-8=0$, корни которого $y_1 = 2(1+\sqrt{3})$ и $y_2 = 2(1-\sqrt{3})$. Теперь многочлен $p(x)$ представим в виде $(x^2-2(1+\sqrt{3})x+1)(x^2-2(1-\sqrt{3})x+1)$. Здесь $x^2-2(1-\sqrt{3})x+1 > 0$ при любом $x \in R$, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству $x^2-2(1+\sqrt{3})x+1 > 0$, решения которого приведены в ответе;

б) $]-1-\sqrt{3}; (3-\sqrt{17})/2[\cup]\sqrt{3}-1; (3+\sqrt{17})/2[$. ● При разложении левой части неравенства на множители используйте подстановку $y = x-2/x$. 25. ▲ Имеем

$$p(x) = (x-1)x[x^3(x^2+x+1)+1]+1 \qquad (1)$$

или

$$p(x) = (1-x)+x^2(1-x^3)+x^6. \qquad (2)$$

Из (1) следует, что $p(x) > 0$ при $x \in]-\infty; 0] \cup [1; \infty[$, а из (2) — $p(x) > 0$ при $x \in]0; 1[$. Таким образом, $p(x) > 0$ при любом $x \in R$. 26. ▲ Функция $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ определена на всей числовой оси, за исключением точек x_k, $k \in N$, $k \leqslant n$, являющихся нулями многочлена $Q(x)$. Пусть x_0 — одно из решений неравенства $f(x) > 0$. Тогда $P(x_0)$ и $Q(x_0)$ — числа одного знака и, следовательно, $\varphi(x_0) = P(x_0)Q(x_0) > 0$, т. е. x_0 является также одним из решений неравенства $\varphi(x) = P(x)Q(x) > 0$. (При $x = x_k$ $\varphi(x_k) = 0$ и значения x_k не удовлетворяют неравенству $\varphi(x) > 0$.) Таким образом, все решения неравенства $f(x) > 0$ являются решениями неравенства $\varphi(x) > 0$ (в силу произвольности выбора числа x_0). Аналогично можно доказать, что если x_0 — некоторое решение неравенства $\varphi(x) > 0$, то это же число x_0 будет и решением неравенства $f(x) > 0$ ($P(x_0)$ и $Q(x_0)$ — числа одного знака). Если $P(x)$ и $Q(x)$ при всех x из области определения функции $f(x)$ принимают значения разных знаков, то неравенства $f(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$ решений не имеют, т. е. эти неравенства также равносильны.

27. а) $]-2;\ 0[\cup]2;\ \infty[$. ▲ Неравенство $\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x}=\frac{x+2}{x(x-2)}>0$ равносильно неравенству $(x+2)(x-2)x>0$, решив которое методом интервалов получим ответ; б) $]-1;\ 2[\cup]3;\ +\infty[$; в) $]-\infty;\ -1[\cup]0;\ 1/2[\cup]1;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$; г) $]1;\ 5/3[\cup]2;\ 7/3[\cup]3;\ \infty[$. ◐ Приведите левую часть неравенства к виду $x+1/(x-1)+x+1/(x-3)$; д) $]-2;\ -1[\cup[0;\ 1]\cup]2;\ \infty[$;
е) $]-7;\ -\sqrt{37}[\cup]-5;\ 0[\cup]5;\ \sqrt{37}[\cup]7;\ \infty[$. 28. а) $]-1;\ 0[$. ◐ Положите $x^2+x=y$;
б) $]-\infty;\ -2[\cup]-1;\ 1[\cup]2;\ 3[\cup]4;\ 6[\cup]7;\ \infty[$. ▲ Преобразуем левую часть неравенства:

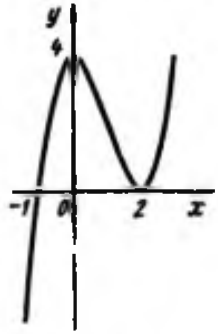
$$\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-4}\right)+4\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)=\frac{4}{x^2-5x+6}-\frac{3}{x^2-5x+4}.$$

Полагая теперь $x^2-5x+5=y$, получаем неравенство (после преобразований) $\frac{y^2-30y+209}{(y-1)(y-11)}\geqslant 0$, равносильное неравенству $(y+1)\times(y-1)(y-11)(y-19)\geqslant 0$; решением последнего служит $]-\infty;\ -1[\cup]1;\ 11[\cup]19;\ \infty[$. Решив далее совокупность неравенств

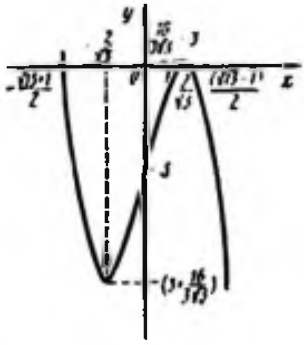
$$x^2-5x+5<-1,\quad 1<x^2-5x+5<11\quad\text{и}\quad x^2-5x+5>19,$$

получим ответ; в) $]-\infty;\ 1[\cup]3/2;\ 5/2[\cup]7/2;\ 4[$. 29. а) $]-1/2;\ 1[$; б) $[-2;\ 1]$. ◐ См. решение задачи 15 этого параграфа. 30. а) $]0;\ 1/3[\cup]3;\ \infty[$. ◐ Преобразуйте левую часть неравенства к виду $(x+1/x+2)^2,(x+1,x)$ и положите $x+1/x=y$;
б) $[-(1+\sqrt{5})/2;\ -1]\cup[(1-\sqrt{5})/2;\ 0[\cup[(1-\sqrt{5}-1)/2,\ 1]\cup[(\sqrt{5}+1)/2;\ \infty[$. ◐ Положите $x-1/x=y$.
31. $]-\infty;\ -6[\cup](6-6\sqrt{26})/5;\ -4[\cup]-4;\ 0[\cup]6;\ (6+6\sqrt{26})/5[$. ◐ Представьте правую часть неравенства в виде $(x-6),(x+6)+(x+6)/(x-6)$. 32. $[0;\ \sqrt{2}]$. 33. $[-1-2\sqrt{2};\ -3[\cup]1;\ 3]$.
34. а) $3x^2-12x$; б) $1/3-3x^2$; в) $4x^3-6$; г) $3x^2-2x^3$; д) $3x^2+2x+3$; е) $3x^3-8x+3$; ж) $4x^3+9x^2-14x+7$; з) $(x-1)(x-2)\times(x-3)+x(x-2)(x-3)+x(x-1)(x-3)+x(x-1)(x-2)$; и) $(1-x^2)/(1+x^2)^2$; к) $(x^2-2x-2),(2+x^2)^2$; л) $(2x^3+9x^2-3)/(x+3)^2$; м) $(2x^4+4x^3-4x+4),(x+1)^3$; н) $(2x^3-9x^2-24x+7),(x-4)^2$; о) $3x^2+1,(1-x)^2$; п) $-90(2-3x)^{29}$; р) $32(3x+1,x^2)(6x^2-4,x+1)^7$; с) $-(8x(x^2+1))(x^2-1)^3$; т) $8(4x^3-3x^2+10x)(x^4-x^3-5x^2-2)^7$. 35. а) 12; б) 0; в) 60; г) 7; д) 0; е) 1/2; ж) $15a^2+2/a^3-1$; з) $-1/(1+a^2)$; и) 0; к) $(-1)^n n!$. 36. а) $y=-x$; б) $y-2=0$; в) $y=-3x+5$; г) $y=-11x-7$; д) $y=44x-84$; е) $y=2x-2$; ж) $y=-4x+7$. 37. $(-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2})$. 38. $(-2;\ 52/3)$ и $(5;\ -197,6)$. 39. $(1;\ 0)$ и $(-1;\ -4)$. 40. $(3;\ 9)$. 41. $(0;\ 1)$. 42. ◐ Покажите, что неравенство $5x^4+8>0$ выполняется для любого $x\in R$. 43. а) $\{1/3;\ 1/2\}$; б) $\{\sqrt[3]{3}\}$; в) функция критических точек не имеет; г) $\{-2;\ -4/9\}$; д) $\{-1;\ 0\}$; е) $\{\sqrt[3]{3}\}$. 44. а) $\{2\}$; б) $\{-3;\ -2;\ 1\}$; в) $\{0\}$; г) $\{-1;\ 0;\ 1\}$; д) $\{0\}$. 45. а) $\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$;

б) $\{-3;\ -2;\ 2;\ 3\}$; в) $\{(3-\sqrt{5})/2;\ (3+\sqrt{5})/2\}$; г) $\{-1;\ 1\}$; д) $\{2\}$. 46. а) $]-2;\ 1[$; б) $]-\infty;\ -1/4[$; в) $]-\sqrt{12};\ 0[$ и $]0;\ \sqrt{12}[$; г) $]-\sqrt{2};\ -1[$ и $]-1;\ \sqrt{2}[$. 47. а) $]-\infty;\ 1/3[$ и $]3;\ \infty[$; б) $]1;\ 3[$; в) $]0;\ \infty[$; г) $]-2-\sqrt{3};\ -1[$ и $]-1;\ \sqrt{3}-2[$; д) $]-\infty;\ -1[$ и $]1;\ \infty[$. 48. а) $x=-5$ — точка максимума, $x=3$ — точка минимума; б) функция точек экстремума не имеет; в) $x=1/3$ — точка минимума, $x=1$ — точка максимума; г) $x=-5,4$ — точка минимума; д) $x=-3$ и $x=4$ — точки минимума, $x=1/2$ — точка максимума; е) $x=1$ — точка минимума; ж) $x=0$ — точка минимума. 49. $8\sqrt{2}$. 50. а) $y_{\min}=y(-1)=-13$, $y_{\max}=y(0)=-3$; б) $y_{\min}=y(-\sqrt{2})=-4\sqrt{2}$, $y_{\max}=y(1)=5$; в) $y_{\min}=y\left(\frac{1}{4}\right)=-8\frac{139}{256}$, $y_{\max}=y(2)=64$; г) $y_{\min}=y(-1)=-7$, $y_{\max}=y(1)=5$; д) $y_{\min}=y(-2)=8/3$, $y_{\max}=y(-1)=3$.

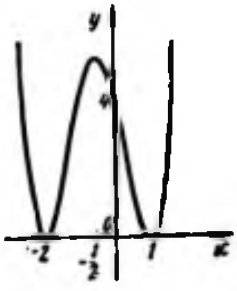


51. На интервалах $]-\infty;\ 0[$ и $]2;\ \infty[$ функция возрастает, на интервале $]0;\ 2[$ — убывает; $x=0$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума



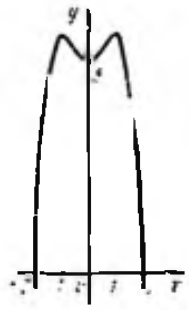
52. На интервалах $]-\infty;\ -2/\sqrt{3}[$ и $]2/\sqrt{3};\ \infty[$ функция убывает, на интервале $]-2/\sqrt{3};\ 2/\sqrt{3}[$ — возрастает; $x=-2/\sqrt{3}$ — точка минимума, $x=2/\sqrt{3}$ — точка максимума;

$$y(-2/\sqrt{3})=-3-16/(3\sqrt{3});$$
$$y(2/\sqrt{3})=-3+16/(3\sqrt{3}).$$

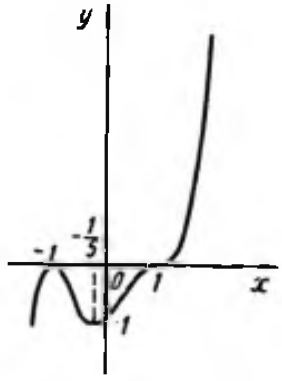


53. На интервалах $]-\infty;\ -2[$ и $]-1/2;\ 1[$ функция убывает, на интервалах $]-2;\ -\frac{1}{2}[$ и $]1;\ \infty[$ — возрастает; $x=-2$ и $x=1$ — точки минимума, $x=-1/2$ — точка максимума; $y(-2)=y(1)=0$.
$y(-1/2)=81/16$.

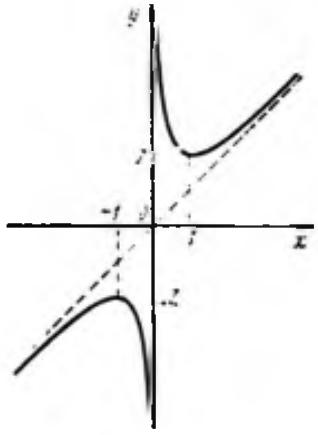
54. На интервалах $]-\infty;\ -1[$ и $]0;\ 1[$ функция возрастает, на интервалах $]-1;\ 0[$ и $]1;\ \infty[$ — убывает; $x=-1$ и $x=1$ — точки максимума, $x=0$ — точка минимума; $y(-1)=y(1)=9$, $y(0)=8$.



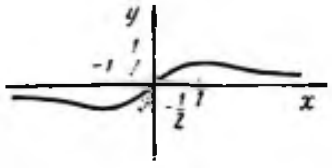
55. На интервалах $]-\infty;\ -1[$ и $\left]-\frac{1}{5};\ \infty\right[$ функция возрастает, на интервале $\left]-1;\ -\frac{1}{5}\right[$ — убывает; $x=-1$ — точка максимума, $x=-1/5$ — точка минимума; $y(-1)=0$, $y(-1/5)=-864/3125$.

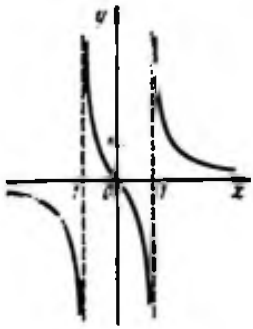


56. На интервалах $]-\infty;\ -1[$ и $]1;\ \infty[$ функция возрастает, на интервалах $]-1;\ 0[$ и $]0;\ 1[$ — убывает; $x=-1$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума.

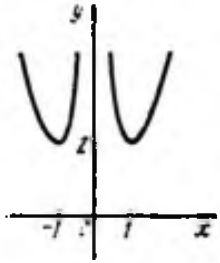


57. На интервалах $]-\infty;\ -1[$ и $]1;\ \infty[$ функция убывает, на интервале $]-1;\ 1[$ — возрастает; $x=-1$ — точка минимума, $x=1$ — точка максимума.

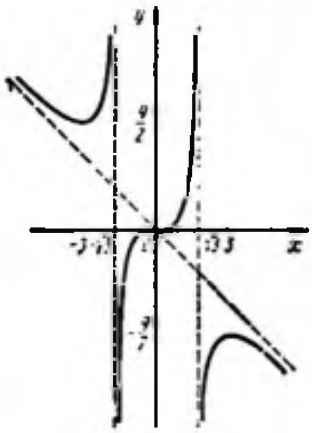




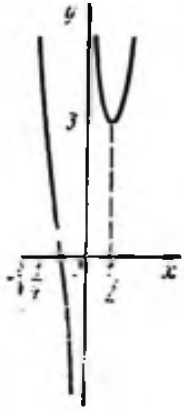
58. Функция убывает на интервалах $]-\infty;\ -1[$, $]-1;\ 1[$ и $]1;\ \infty[$.



59. На интервалах $]-\infty;\ -1[$ и $]0;\ 1[$ функция убывает, на интервалах $]-1;\ 0[$ и $]1;\ \infty[$ возрастает; $x=-1$ и $x=1$ — точки минимума.



60. На интервалах $]-\infty;\ -3[$ и $]3;\ \infty[$ функция убывает, на интервалах $]-3;\ -\sqrt{3}[$, $]-\sqrt{3};\ \sqrt{3}[$ и $]\sqrt{3};\ 3[$ — возрастает; $x=-3$ — точка минимума, $x=3$ — точка максимума; $y(-3)=9$, $y(3)=-9$.



61. На интервалах $]-\infty;\ 0[$ и $]0;\ 1/2[$ функция убывает, на интервале $]1/2;\ \infty[$ — возрастает; $x=1/2$ — точка минимума; $y(1/2)=3$.

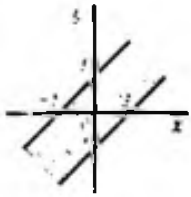
1. а) $\{(0;\ 0)\}$; б) $\{(c;\ c/2)\ c \in R\}$; в) $\{(c_1;\ c_2)\mid c_1 \in R,\ c_2 \in R\}$; г) $\{(c;\ 0)\ c \in R\}$; д) $\varnothing$. 2. а) $\{(1;\ -1)\}$; б) $\{(3/4+2c;\ c)\mid c \in R\}$; в) $\varnothing$; г) $\{(c;\ 4c-1/2)\mid c \in R\}$ при $a \in \{-1/2\}$ и $\varnothing$ при $a \notin \{-1/2\}$. 3. а) $]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ \infty[$; б) $k \in R$; в) $]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ \infty[$. 4. а) $\{-2/3\}$; б) $\{1\}$; в) $\{-1/2\}$. 5. $\{(0;\ 0)\}$. 6. $\{(0;\ 0;\ 9/4);\ (2;\ -1;\ 1)\}$. ▲ Подставляя в систему решение $(1;\ 3)$ и учитывая необходимое условие неопределенности системы уравнений, получаем систему уравнений относительно a, b и c:

$$\begin{cases} a-3b=2a-b, \\ c+1+3c=10-a+3b, \\ a/(c+1)=-b/c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b, \\ 4c=9+5b, \\ b(c-1)=0. \end{cases}$$

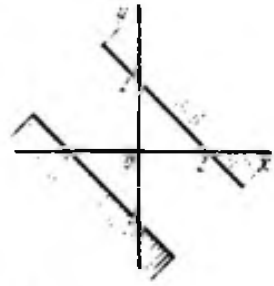
Эта система имеет два решения: $(0;\ 0;\ 9/4)$ и $(2;\ -1;\ 1)$. Проверкой убеждаемся, что при этих значениях a, b и c выполняется условие $\dfrac{a}{c+1}=\dfrac{-b}{c}=\dfrac{2a-b}{10-a+3b}$ (во втором уравнении системы коэффициенты отличны от нуля), т. е. выполняется достаточное условие неопределенности исходной системы уравнений. 7. а) $\{3\}$; б) $\{9/4\}$. 8. $\{(-2;\ -7)\}$. ▲ Вторая система уравнений имеет единственное решение $(x_0;\ y_0)$. Поэтому системы будут равносильными, если первая система уравнений будет иметь единственное решение $(x_0;\ y_0)$. Найдем это решение. Так как $x_0+y_0=3$ и $x_0+3y_0=3$, то, решив систему этих уравнений, найдем $x_0=3$, $y_0=0$. Подставив эти значения переменных в первое уравнение второй системы, получим $a^2=4$. Следовательно, $a_1=-2$ и $a_2=2$. Подстановка $a_1=-2$, $x=3$, $y=0$ в первое уравнение первой системы дает $-2\cdot 3+2\cdot 0=b+1$, $b=-7$. Значение $a=2$ не подходит, так как в этом случае первая система уравнений имеет бесчисленное множество решений. 9. $]-2;\ 4[$. 10. $]-1-\sqrt{3};\ \infty[$. 11. $\{(-1;\ 4)\}$. ■ Положите $1/(2x+y-1)=u$ и $1/(x+2y-3)=v$. 12. в) $\{(3;\ 1);\ (-3/2;\ 5/2);\ (-9;\ -5);\ (9/2;\ -1/2)\}$; б) $\{(-3;\ -2);\ (-2;\ -3);\ (3;\ 2);\ (2;\ 3)\}$. 13. $\{(30;\ 10)\}$. ▲ Пусть дано уравнение $ax+by=c$, где a, b, c — целые числа, причем a и b — взаимно простые, и требуется найти все целые x и y, удовлетворяющие этому уравнению. Предположим, что каким-либо способом (например, путем подбора) найдено одно целочисленное решение: $x=\alpha$, $y=\beta$. Подставляя эти значения в уравнение, получаем тождество $a\alpha+b\beta=c$. Вычтем почленно это тождество из данного уравнения и преобразуем результат: $a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$, $ax=a\alpha-b(y-\beta)$, $x=\alpha-(b(y-\beta))/a$. Для того чтобы x было целым числом, необходимо и достаточно, чтобы выражение $(b(y-\beta))/a$ было целым числом (α — целое число), т. е. $y-\beta$ должно делиться на a. Обозначив целое частное от деления $y-\beta$ на a через t, $t \in Z$, получим $y=\beta+at$ и далее $x=\alpha-bt$. Таким образом, все решения описываются формулами $x=\alpha-bt$, $y=\beta+at$, $t \in Z$. Решения данной задачи запишем в виде $x=\alpha-31t$, $y=\beta+23t$, $t \in Z$. Найдем какое-либо частное решение $(\alpha;\ \beta)$. Перепишем исходное уравнение в виде $23x=1000-31y$ и разрешим его относительно x:

$x=43-y+(11-8y)/23$. Из этой записи следует, что $(11-8y)/23$ должно быть целым числом, т. е. $(11-8y)/23=u$, $u\in Z$, или $8y=11-23u$. Найдем теперь y: $y=(11-24u+u)/8=1-3u+(u+3)8$. Полагая $u=-3$, получаем частное решение $\beta=1-3(-3)=10$ и $\alpha=43-10-3=30$. Таким образом, решение данного уравнения имеет вид $x=30-31t$, $y=10+23t$, $t\in Z$. Решая систему неравенств $30-31t>0$ и $10+23t>0$ в целых числах, найдем $t=0$, т. е. $x=30$, $y=10$.

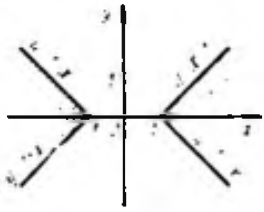
14. а)



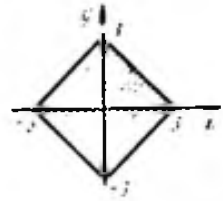
14. б)



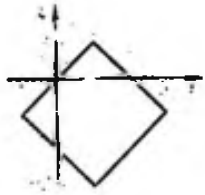
14. в)



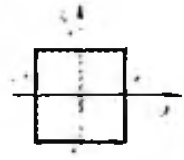
14. г)



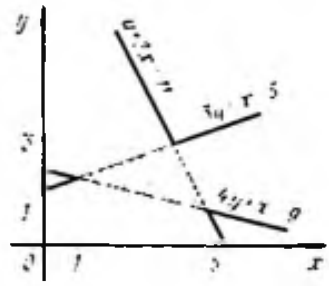
14. д)



14. е)



15. $\{(2;\ 2);\ (3;\ 2);\ (4;\ 2)\}$



16. $]-(1+\sqrt{13})/2;\ -2[$. 17. $\{(1;\ 2;\ 3)\}$. 18. $\varnothing$. 19. $\{(2;\ -3;\ 6)\}$. 20. $\{(-2t-2;\ 3t+1;\ 2t+3)\mid t\in R\}$. ● Положите $(x+2)/-2=(y-1)/3=(z-3)/2=t$. 21. а) 25. ▲ *1-й способ.*

Умножим уравнения системы на α и β ($\alpha\beta \neq 0$) и сложим их:

$$(2\alpha/3+\beta)x+(4\alpha/5+\beta)y+(5\alpha/6+\beta)z=61\alpha+79\beta.$$

Потребуем, чтобы одновременно выполнялись равенства $2\alpha/3+\beta=0$, $4\alpha/5+\beta=2/5$, $5\alpha/6+\beta=1/2$, тогда $S=2y/5+z/2=61\alpha+79\beta$. Значения α и β найдем из системы уравнений

$$2\alpha/3+\beta=0,\ 4\alpha/5+\beta=2/5,\ 5\alpha/6+\beta=1/2.$$

Эта система совместна и имеет решение $\alpha=3$, $\beta=-2$; $S=61\cdot 3-79\cdot 2=25$.

2-й способ. Представим начальную систему уравнений в виде

$$2x/3+4y/5=61-5z/6,\ x+y=79-z$$

и решим ее относительно x, y, считая z известным. Умножая второе уравнение на $-2/3$ и складывая с первым уравнением, получаем:

$$\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right)y=61-\frac{79\cdot 2}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\right)z;\ \frac{2}{15}y=\frac{25}{3}-\frac{z}{6};$$

$$\frac{2}{5}y=25-\frac{z}{2}.$$

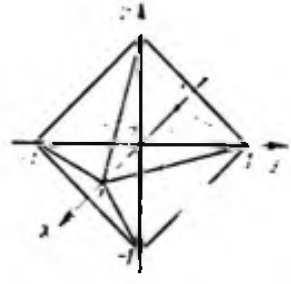
Теперь находим $S=2y/5+z/2=25-z/2+z/2=25$; б) $\{(27;\ 10;\ 42)\}$. ▲ Так как по условию x, y, z — натуральные числа, то $x=3k$, $y=5l$ и $z=6m$, где $k\in N$, $l\in N$, $m\in N$. Систему уравнений теперь можно представить в таком виде:

$$4l+5m=61-2k,\quad 5l+6m=79-3k.$$

Отсюда находим $l=29-3k$ и $m=2k-11$. Наибольшим значением $k\in N$, удовлетворяющим системе неравенств

$$k>0,\quad 29-3k>0,\quad 2k-11>0,$$

будет значение $k=9$. Далее находим решение системы: $x=3\cdot 9=27$, $y=(29-3\cdot 9)5=10$, $z=6(2\cdot 9-11)=42$. 22. $a<0$. ● Исключите из системы неравенств b и c. 23. Правильный октаэдр



§ 6. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С НЕСКОЛЬКИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

1. а) $\{(-4/9;\ 20/9);\ (2;\ 1)\}$; б) $\{(-1;\ 3);\ (71/21;\ -25/7)\}$; в) $\{(51;\ 24{,}5)\}$. ● Разложите левую часть первого уравнения системы на множители; г) $\{(-19{,}6;\ 5{,}2);\ (-14;\ 8)\}$. ● Представьте левую часть первого уравнения системы в виде $(x+3y)^2 - 6(x+3y) - 40$ и положите $x+3y=t$. 2. а) $\{(2;\ 3);\ (3;\ 2)\}$. ▲ Используя обратную теорему Виета, получаем квадратное уравнение $t^2-5t+6=0$, корни которого $t_1=2$ и $t_2=3$. Данная система обладает тем свойством, что если она имеет одно решение $(t_1;\ t_2)$, то упорядоченная пара чисел $(t_2;\ t_1)$ также является ее решением. Таким образом, множество решений исходной системы есть $\{(2;\ 3);\ (3;\ 2)\}$; б) $\{(4;\ -1);\ (1;\ -4)\}$. ● Положите $-y=z$; в) $\{(1;\ 3)\ (3;\ 1)\}$. ● Используйте тождество $2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)$; г) $\{(-1/2;\ -1/3);\ (1/3;\ 1/2)\}$. ● Положите $1/x=u$, $-1/y=v$; д) $\{(-1;\ 2);\ (2;\ -1)\}$. ▲ Используя тождество $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$, найдем xy: $1^3 = 7+3xy\cdot 1 \Rightarrow xy=-2$. Таким образом данная система равносильна системе

$$x+y=1,\quad xy=-2.$$

Решая теперь вспомогательное квадратное уравнение $t^2-t-2=0$, найдем все решения исходной системы; е) $\{(1;\ 2);\ (2;\ 1)\}$. ● Для нахождения $xy=z$ используйте равенство $(x+y)^4=x^4+y^4+4(x+y)^2z-2z^2$; ж) $\{(3;\ 2);\ (2;\ 3)\}$; з) $\{(-1;\ -4);\ (4;\ 1)\}$. 3. а) $\{(-3;\ 4);\ (4;\ -3)\}$;

б) $\{(5+\sqrt{28};\ -5+\sqrt{28});\ (5-\sqrt{28};\ -5-\sqrt{28});\ (5;\ 2)\ (-2;\ -5)\}$;

в) $\{(0{,}6;\ 0{,}3);\ (0{,}4;\ 0{,}5)\}$; г) $\{(-1;\ 2);\ (-1/4;\ -1/4)\}$;

д) $\{(2;\ 1);\ (1;\ 2);\ ((5+\sqrt{21})/2;\ (5-\sqrt{21})/2);\ ((5-\sqrt{21})/2;\ (5+\sqrt{21})/2)\}$.

● Положите $x+y=u$, $xy=v$, а затем $-u+v=z$, $uv=t$.

4. а) $\{(-(25+5\sqrt{61})/9;\ (5+\sqrt{61})/9);\ ((5\sqrt{61}-25)/9;\ (5-\sqrt{61})/9);\ (-6;\ -4/3);\ (3/2;\ 1/3)\}$. ▲ Полагая $x=yt$, приведем первое уравнение системы к виду $y^2(2t^2+t-45)=0$. Решая это уравнение, найдем $t_1=9/2$ и $t_2=-5$ ($y=0$ не удовлетворяет системе). Таким образом, исходная система уравнений равносильна совокупности систем уравнений:

$$\begin{cases} 2x+9y^2=4, \\ x=9y/2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x+9y^2=4, \\ x=-5y, \end{cases}$$

решив которую получим ответ;

б) $\{(-1;\ 3);\ (1;\ -3);\ (16/\sqrt{11};\ 1/\sqrt{11});\ (-16/\sqrt{11};\ -1/\sqrt{11})\}$. ● Умножьте первое уравнение системы на 3, а второе — на -16 и сложите их. Затем положите $x=yt$;

в) $\{(1;\ 2);\ (-1;\ -2);\ (\sqrt{2};\ \sqrt{2});\ (-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})\}$;

г) $\left\{\left(\frac{2+\sqrt{19}}{\sqrt[3]{14+4\sqrt{19}}};\ -\frac{3}{\sqrt[3]{14+4\sqrt{19}}}\right);\ \left(\frac{\sqrt{19}-2}{\sqrt[3]{4\sqrt{19}-14}};\ \frac{3}{\sqrt[3]{4\sqrt{19}-14}}\right);\ (2;\ -1)\right\}$.

5. а) $\{(2;\ 1)\}$. ▲ Умножая второе уравнение системы поочередно на 2 и -2 и складывая с первым, получаем систему уравнений,

равносильную исходной:

$$\left\{\begin{array}{l}16x^2+8xy+y^2-72x-18y+81=0,\\ 4x^2-12xy+9y^2-4x+6y+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(4x+y)^2-18(4x+y)+81=0,\\ (2x-3y)^2-2(2x-3y)+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4x+y=9,\\ 2x-3y=1\end{array}\right.$$

Решение последней системы находится просто (это линейная система): {(2; 1)}; б) $\{(0; 1/\sqrt{3}); (0; -1/\sqrt{3}); (1; 1); (-1; -1)\}$. 6. а) {(2/7; −9/7); (1; 3)}. ● Перемножьте уравнения и положите $x+y=t$; б) {(2; 6); (1; 3)}.7. а) $\{(2\sqrt{2}; -\sqrt{2}); (-2\sqrt{2}; \sqrt{2})\}$; б) $\{(\sqrt{6}; \sqrt{6}/3); (-\sqrt{6}; -\sqrt{6}/3)\}$. 8. {(3; 7/2); (−3; −7/2)}. 9. {(3; 1)}. 10. $a=-1$. Искомая точка (0; −1). 11. а) {(1; −5)}; б) {(1; −3)}; в) {(−3; 1)} при $a\in\{-2\}$; ∅ при $a\notin\{-2\}$. 12. а) {(2; 1; −1); (31/15; 17/15; −2/3)}; б) {(1; 2; 2); (2; 1; 1)}.

13. $\left\{(3; -2; 1); (-2; 3; 1); \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}; -1\right); \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}; -1\right)\right\}$.

14. {(3; 1; −2); (−5; −3; 0)}. ● Выразите из первого уравнения системы y через x и подставьте во второе уравнение системы. 15. {(3; 5; −1); (−3; −5; 1)}.

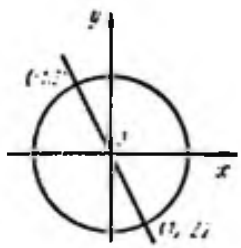
16. $\left\{(2; -1; 3); (-2; 1; -3); \left(-\frac{7}{\sqrt{13}}; \frac{5}{\sqrt{13}}; -\frac{11}{\sqrt{13}}\right); \left(\frac{7}{\sqrt{13}}; -\frac{5}{\sqrt{13}}; \frac{11}{\sqrt{13}}\right)\right\}$.

17. {(−4; −3; 1); (4; 3; −1)}. 18. $\left\{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)\right\}$. ● Преобразуйте уравнения системы к виду

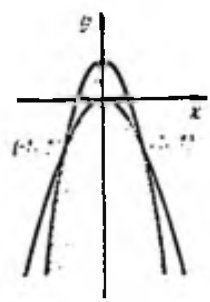
$$\frac{x+y}{xy}=5=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ \frac{y+z}{yz}=7=\frac{1}{y}+\frac{1}{z},\ \frac{x+z}{xz}=6=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}.$$

19. {(−1; 1; 0); (1; −1; 0)}. 20. {(3; 3; 3)}. 21. {(1; 5; 0); (1; −5; 0); (−1; 5; 0); (−1; −5; 0)}. ● Положите $y-z=t$.

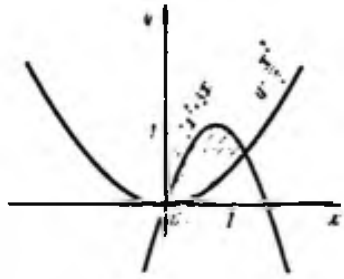
22, а)



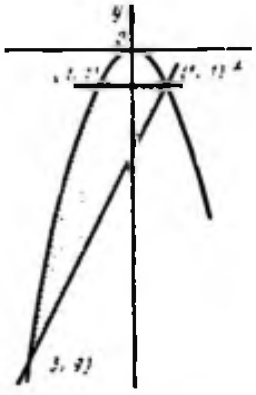
22. б)



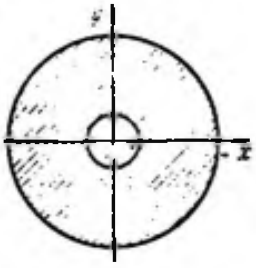
23. а)



23. б)



23. в)



ГЛАВА II

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 1. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. $\{a^2-1\}$ при $a \in [0; \infty[$, $\varnothing$ при $a \in]-\infty; 0[$. 2. $\{(a-3)/2\}$ при $a \in [-3; \infty[$, $\varnothing$ при $a \in]-\infty; -3[$. 3. $\{3\}$. 4. а) $\{-3\}$. ▲ Положим $\sqrt{22-x}=y \geqslant 0$, тогда $x=22-y^2$ и исходное уравнение будет равносильно системе

$$11+2(22-y^2)=y,\ y \geqslant 0.$$

Решением этой системы является $y=5$. Теперь находим $x=22-5^2=-3$; б) $\{28\}$; в) $\{4\}$; г) $\{0; 4/3\}$. 5. а) $\{6\}$. ▲ Допустимыми значениями переменной x данного уравнения являются $x \in [2; \infty[$. Умножая обе части уравнения на $\sqrt{x+10}-\sqrt{x-2} \neq 0$ (при указанных ограничениях), получаем систему

$$\sqrt{x+10}-\sqrt{x-2}=2,\ \sqrt{x+10}+\sqrt{x-2}=6.$$

Вычтем из второго уравнения первое: $\sqrt{x-2}=2$; отсюда находим: $x-2=2^2$, $x=6$. *Замечание.* Так как $x+10>x-2$ в области определения этого уравнения, то $\sqrt{x+10}>\sqrt{x-2}$ и $\sqrt{x+10} \geqslant 0$;

б) $\varnothing$; в) $\{-1\}$; г) $\{12\}$; д) $\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2;\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2\right\}$ при $a\in\,]0;\ 1]$, $\varnothing$ при $a\in\,]-\infty;\ 0]\cup]1,\ \infty[$; е) $\{-6;\ 1\}$. ● Умножьте обе части уравнения на $\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+5x-2}$. 6. а) $\{-1;\ 3\}$. ▲ *1-й способ.* Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{x+1}. \qquad (1)$$

Возведем обе части уравнения (1) в квадрат и уединим радикал:

$$x+1=2\sqrt{x+1}. \qquad (2)$$

Уравнение (2) решаем методом, изложенным в решении задачи 4 а): полагаем $\sqrt{x+1}=y\geqslant 0$, переходим к системе

$$y^2=2y,\ y\geqslant 0$$

и отсюда находим корни: $x_1=-1$, $x_2=3$. Поскольку уравнение (1) мы возводили в квадрат, то полученные корни уравнения (2) необходимо проверить. Проверка показывает, что они оба удовлетворяют исходному уравнению.

2-й способ. Умножим обе части уравнения на выражение, сопряженное левой части уравнения $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}$ (в области определения уравнения ($x\geqslant -1$) это выражение отлично от нуля). В результате получим систему уравнений относительно $\sqrt{2x+3}\geqslant 0$ и $\sqrt{x+1}\geqslant 0$

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1,\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=x+2,$$

из которой нам достаточно найти $\sqrt{x+1}$ ($\sqrt{2x+3}>\sqrt{x+1}>0$) в области определения. Имеем уравнение $2\sqrt{x+1}=x+1$, которое решаем изложенным ранее способом; б) $\{3\}$; в) $\{2\}$; г) $\{5\}$; д) $\{20\}$; е) $\{-4/3\}$; ж) $\{-1;\ 0\}$. ● Положите $x^2+x+1=y$; з) $\{5\}$. 7. а) $\{16\}$. ● Положите $\sqrt{x}=y$; б) $\{9\}$; в) $\{-3;\ 6\}$. ● Положите $\sqrt{x^2-3x+7}=y$; г) $\{-9/2;\ 3\}$; д) $\{1\}$. ● Положите $\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}=y$; е) $\{5/3\}$. ● Положите $\sqrt{(x+1)/(x-1)}=y$; ж) $\{5a/3\}$ при $a\neq 0$, $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ \infty[$ при $a=0$; з) $\{1\}$. ● Положите $\sqrt{2-x}+3=y$; и) $\{3;\ 9(9-\sqrt{97})/8\}$. ● Положите $\sqrt{1+x}=y$ и решите уравнение $4x^2+12xy-27y^2=0$ относительно x. 8. $\{5\pm a\sqrt{8-a^2}/2\}$ при $a\in[2;\ 2\sqrt{2}]$, $\varnothing$ при $a\in\,]-\infty;\ 2[\cup]2\sqrt{2};\ \infty[$. ▲ Пусть $\sqrt{7-x}=u$, $\sqrt{x-3}=v$, имеем систему уравнений

$$u+v=a,\ 7-x+x-3=u^2+v^2=4;\ u\geqslant 0,\ v\geqslant 0,$$

решая которую подстановкой $u=a-v$ получаем:

$$\begin{cases} u_1=(a+\sqrt{8-a^2})/2, \\ v_1=(a-\sqrt{8-a^2})/2; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2=(a-\sqrt{8-a^2})/2; \\ v_2=(a+\sqrt{8-a^2})/2. \end{cases}$$

Чтобы уравнение имело действительные корни, необходимо выполнение системы неравенств

$$8-a^2\geqslant 0,\ a-\sqrt{8-a^2}\geqslant 0.$$

Решением этой системы являются значения $a \in [2;\ 2\sqrt{2}]$. Теперь находим ответ: $x - 3 = v^2$, $x = 3 + v^2 = 5 \pm a\sqrt{8 - a^2}/2$. 9. а) $D(y) = [-1;\ 2]$; $E(y) = [\sqrt{3};\ \sqrt{6}]$. ● Для нахождения множества значений функции решите уравнение $\sqrt{2-x} + \sqrt{1+x} = y$ и найдите $D(y)$; б) $D(y) = [-1/2;\ 3/2]$; $E(y) = [0;\ 2]$. 10. {3}. ▲ Полагая $\sqrt[4]{x-2} = u \geqslant 0$, $\sqrt[4]{4-x} = v \geqslant 0$, получаем систему уравнений

$$u + v = 2, \quad u^4 + v^4 = 2.$$

Возводя первое уравнение в четвертую степень и учитывая второе уравнение, получаем $uv(2(u+v)^2 - uv) = 7$, а так как $u + v = 2$, то $(uv)^2 - 8(uv) + 7 = 0$, откуда $(uv)_1 = 1$; $(uv)_2 = 7$. Далее, для нахождения решения исходного уравнения необходимо решить две системы уравнений:

$$u + v = 2, \ uv = 1 \text{ и } u + v = 2, \ uv = 7.$$

Первая из этих систем имеет решение $u = v = 1$. Теперь получаем: $\sqrt[4]{x-2} = u = 1$, $x = 3$. Вторая система уравнений действительных решений не имеет. 11. $\{(2a+1)/(a-2)\}$ при $a \in \left]-\infty;\ \frac{1}{3}\right] \cup]2;\ \infty[$, ∅ при $a \in]1/3;\ 2[$. ▲ Исходное уравнение равносильно системе

$$x^2 + ax - 2a = (x+1)^2, \ x + 1 \geqslant 0.$$

Решая уравнение системы и отбирая значения a, при которых выполняется неравенство $x + 1 \geqslant 0$, получаем ответ. 12. $\{a+1+\sqrt{2a};\ a+1-\sqrt{2a}\}$ при $a \in [0;\ 1/2]$, $\{a+1+\sqrt{2a}\}$ при $a \in]1/2;\ \infty[$, ∅ при $a \in]-\infty;\ 0[$. 13. $]-\infty;\ 0[$ при $a = 0$; $\{0;\ 3a/4\}$ при $a \in]0;\ \infty[$, ∅ при $a \in]-\infty;\ 0[$. 14. $\{a^2+a;\ a^2-a+1\}$ при $a \in [0;\ 1]$, $\{a^2+a\}$ при $a \in]1;\ \infty[$, ∅ при $a \in]-\infty;\ 0[$. 15. {0} при $a = 1$, ∅ при $a \neq 1$. 16. $\{-1\} \cup [2;\ \infty[$. 17. $]0{,}5;\ 2]$. 18. $[-\sqrt{3};\ 0[\cup]0;\ 2]$. 19. $]-0{,}5;\ \infty[$ при $a \in [1;\ \infty[$, $]-0{,}5;\ -0{,}5(1 - 1/(1-a)^2)[$ при $a \in]-\infty;\ 1[$. 20. $]1;\ 3]$. 21. $[-2;\ \infty[$ при $a \in]-2;\ \infty[$, ∅ при $a \in]-\infty;\ -2[$. 22. а) $]-5/8;\ 2,\ 4]$. ▲ Пусть $\sqrt{24 - 10x} = y \geqslant 0$, тогда $x = 0{,}1(24 - y^2)$. Исходное неравенство равносильно системе

$$y > 3 - \frac{4}{10}(24 - y^2), \ y \geqslant 0.$$

Решением этой системы являются значения y, удовлетворяющие неравенству $0 \leqslant y < 5{,}5$. Решая теперь неравенство $0 \leqslant \sqrt{24 - 10x} < 5{,}5$, получим ответ; б) $](\sqrt{5}-1)/2;\ 1]$; в) $]3;\ 4{,}8[$; г) $]1;\ 2/\sqrt{3}]$. ● Положите $1/x = t$; д) $](\sqrt{13}-5)/2;\ 1]$. 23. а) $]3;\ 12[$; б) $[-2;\ \infty[$; в) $](5-\sqrt{13})/6;\ \infty[$; г) $]8/3;\ \infty[$. 24. $\left[2;\ \frac{2}{3}\sqrt{21}\right[$. 25. а) $]3/2;\ 2[\cup]2;\ 26[$. ● Умножьте числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2x-3}+1$; б) $]-2;\ 1[\cup]1;\ \infty[$. ● Умножьте обе части неравенства на $2 + \sqrt{x+3}$; в) $[0;\ 1/2]$. ▲ Решениями данного неравенства могут быть лишь $x \geqslant 0$. Умножая обе части неравенства на $\sqrt{x+2} + \sqrt{5x} > 0$ и перенося все члены

неравенства вправо, получаем неравенство

$$0 > (4x-2)\left(1+\sqrt{x+2}+\sqrt{5x}\right). \qquad (1)$$

Сомножитель $\left(1+\sqrt{x+2}+\sqrt{5x}\right)$ положителен, поэтому неравенство (1) будет выполняться, если $4x-2<0$, т. е. $x<1/2$. Осталось решить систему неравенств

$$x \geqslant 0, \quad x < 1/2;$$

т) $]1/2;\ \infty[$. 26. $[-4;\ 0[\cup]4;\ 6]$. ▲ Данному неравенству могут удовлетворять лишь те значения x, при которых $24+2x-x^2 \geqslant 0$ и $x \neq 0$. Отсюда получаем два промежутка: $[-4;\ 0[$ и $]0;\ 6]$. Очевидно, что $x \in [-4;\ 0[$ — решения неравенства, так как при этих значениях x левая часть неравенства отрицательна, а правая — положительна. Для второго промежутка имеем $\sqrt{24+2x-x^2} < x$ или (после возведения обеих частей неравенства в квадрат) $x^2-x-12>0$, откуда $x \in]-\infty;\ -3[\cup]4;\ \infty[$. Следовательно, $]-\infty;\ -3[\cap]0;\ 6] = \varnothing$, $]4;\ \infty[\cap]0;\ 6] =]4;\ 6]$. 27. $[-1;\ -3/4[$. ▲ Полагая $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=y$, приводим исходное неравенство к такому: $y^2-3y+2<0$. Решая последнее, найдем $1<y<2$ или $1<\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}<2$, что эквивалентно системе

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}>1,\ \sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}<2,\ x \geqslant -1.$$

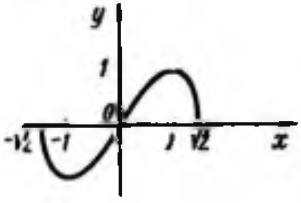
Решим первое неравенство системы. Возводя его в квадрат и преобразовывая, получаем неравенство $2\sqrt{x^2+4x+3} > -3-2x$, правая часть которого при $x \geqslant -1$ отрицательна, а левая — неотрицательна. Поэтому все $x \in [-1;\ \infty[$ являются решениями этого неравенства. Второе неравенство после возведения в квадрат и приведения подобных членов принимает вид $\sqrt{x^2+4x+3} < -x$. Оно может иметь решения лишь при $-1 \leqslant x \leqslant 0$. Возводя неравенство в квадрат, получаем $4x+3<0$, или $x<-3/4$. Учитывая первое неравенство, получаем ответ. 28. $2k,\ k \in Z$. 29. Не существует. 30. а) $1/(2\sqrt{x})$. ▲ $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} =$$

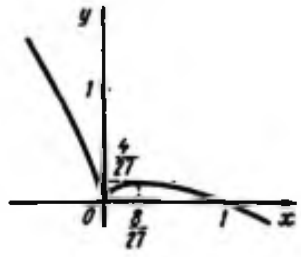
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ (функция $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывна в точке x, $x>0$, поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}$); б) $1/\sqrt[3]{x^2}$. ● Воспользуйтесь тождеством $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b} = (a-b)/\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$; в) $1/4\sqrt[4]{x^3}$ ● Воспользуйтесь тождеством $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b} = (a-b)/\left(\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\right)$. 31. а) $\left(1/2\sqrt{x}\right)(1+1/x)$; б) $5x\sqrt{x}/2$; в) $3{,}5x^2\sqrt{x}-1+1/(2\sqrt{x})$; г) $\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2x}+2\sqrt{3x}+2\sqrt{6x}+3x\sqrt{6}\right)/2\sqrt{x}$; д) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)/\left(2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2\right)$; е) $-x/\sqrt{1-x^2}$;

ж) $-4(1-2\sqrt{x})^3/\sqrt{x}$; з) $\left(1/\left(2\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)\right)\left(1+1/(2\sqrt{x})\right)$. 32. а) 9; б) $-\sqrt{3}/3$; в) 0. 33. а) $x-4y+4=0$; б) $y+1=0$; в) $y+x-4=0$. ● При вычислении производной функции в точке $x=-8$ воспользуйтесь формулой $y'=3\cdot\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$; г) $y-3x+3=0$.

34. (0; 4/27) и (—2/27; 0). 35. а) {4}; б) {1}; в) {3}; г) функция критических точек не имеет; д) {1/3}; е) функция критических точек не имеет. 36. а) $]4;\ \infty[$; б) $]1/2;\ \infty[$; в) $]\sqrt{7}-2;\ \infty[$; г) $]0;\ 9[\cup]9;\ \infty[$; д) $]0;\ 9[$. 37. а) $]-\infty;\ 2{,}5[$; б) $]1;\ 2[$; в) $\left]-\infty;\ \frac{1}{4}\right[$; г) $]0;\ \infty[$; д) $]0;\ 1[$. 38. ▲ Рассмотрим функцию $f(x)=2\sqrt{x}+1/x-3$. Ее производная $f'(x)=1/\sqrt{x}-1/x^2$ на указанном промежутке существует и всюду положительна; $f(1)=0$. Следовательно, $f(x)>0$ на этом промежутке, а это означает, что $2\sqrt{x}>1/x-3$. *Замечание.* Доказательство можно провести элементарными методами, представив $f(x)$ так: $f(x)=(\sqrt{x}-1)^2(2\sqrt{x}+1)/x$. 39. а) $\max\limits_{[-6;\ 8]} f(x)=f(0)=10$, $\min\limits_{[-6;\ 8]} f(x)=f(8)=6$; б) $\max\limits_{[0;\ 4]} f(x)=f(4)=8$, $\min\limits_{[0;\ 4]} f(x)=f(0)=0$; в) $\max\limits_{[0;\ 3]} f(x)=f(3)=\sqrt[3]{9}$, $\min\limits_{[0;\ 3]} f(x)=f(0)=f(2)=0$. 40. Точка $x=1$ является точкой минимума функции, точек максимума у нее нет; $\max\limits_{[0;\ 3]} f(x)=f(3)=4\sqrt{6}$, $\min\limits_{[0;\ 3]} f(x)=f(1)=0$.



41. а) Точка $x=-1$ — точка минимума, $x=1$ — точка максимума;



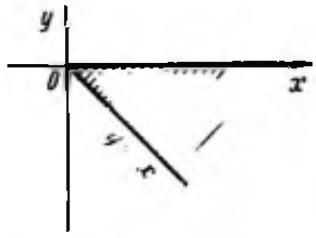
б) точка $x=8/27$ — точка максимума, $x=0$ — точка минимума.

§ 2. СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

1. а) {(16; 30)}. ● Положите $1/\sqrt{x-7}=u$, $1/\sqrt{y+6}=v$; б) {(41; 40)}. 2. а) $\{(c;\ c-1)\mid c\in R,$ кроме $c=1/2\}$; б) {(—1/2; —2/5); (5; 4)}.

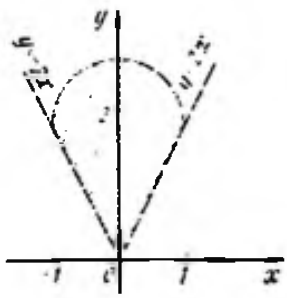
3. $\{(\sqrt{(3\sqrt{109}+9)/2};\ \sqrt{(3\sqrt{109}-9)/2});\ (-5;\ -3)\}$. ● Преобразуйте первое уравнение системы к виду $x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=12$ при $x-y>0$ и $x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}=12$ при $x-y<0$. 4. $\{(0;\ a+\sqrt{a^2+3})\}$ при $a\in]-\infty;\ \sqrt{3}[$, $\{(0;\ a+\sqrt{a^2+3});\ (0;\ -a-\sqrt{a^2-3});\ (0;\ \sqrt{a^2-3}-a)\}$ при $a\in[\sqrt{3};\ \infty[$. 5. $\{-1\ 4\}\cup[0;\ \infty[$. 6. $[2;\ 2\sqrt{2}]$. 7. $\{1\}$.

8.



9.

10.



§ 3. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВА

1. Числа, перечисленные в пунктах б); в); д); и); к); л); м), больше единицы. 2. а) $y>x$; б) $y>x$; в) $x>y$; г) $x>y$. 3. $2^{300}<3^{200}$. ▲ $2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100}$, $3^{200}=(3^2)^{100}=9^{100}$; следовательно, $9^{100}>8^{100}$. 4. а) 9; б) $\ln 3$; в) $\ln a$; г) $4\log_a b$; д) 3; е) 2; ж) 1; з) 2; и) 0. ▲ $a^{\log_b a}=(a^{\log_a b})^{\log_b a}=b^{\log_b a}$, а отсюда следует, что $a^{\log_b a}-b^{\log_b a}=0$. 5. а) $3(1-c-d)$; б) $(5-d)(2(c-2d+c\cdot 1+1))$; в) $5-6d-4$. ▲ Представим десятичную дробь 0,175 в виде обыкновенной: $0{,}175=175/1000=7/40=7/(2^2\cdot 10)$. Таким образом, $\lg 0{,}175=\lg 7-2\lg 2-1$, задача свелась к нахождению $\lg 2$ и $\lg 7$. Имеем: $\lg 196=\lg 2^2\times 7^2=2\lg 2+2\lg 7=c$ (1), $\lg 56=\lg 2^3\cdot 7=3\lg 2+\lg 7=d$ (2). Решив систему уравнений (1) и (2) относительно $\lg 2$ и $\lg 7$, получим $\lg 2=(2d-c)/4$, $\lg 7=(3c-2d)/4$; поэтому $\lg(0{,}175)^4=-4(\lg 7-2\lg 2-1)=5-6d-4$. 6. ▲ Имеем

$$\log_{12}18=\frac{\log_2 18}{\log_2 12}=\frac{1+2\log_2 3}{2+\log_2 3}\ \text{и}\ \log_{24}54=\frac{\log_2 54}{\log_2 24}=\frac{1+3\log_2 3}{3+\log_2 3},$$

поэтому, положив $\log_2 3 = x$, получим

$$ab + 5(a-b) = \frac{1+2x}{2+x}\cdot\frac{1+3x}{3+x} + 5\left(\frac{1+2x}{2+x} - \frac{1+3x}{3+x}\right) =$$

$$= \frac{6x^2+5x+1+5(-x^2+1)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x^2+5x+6}{(x+2)(x+3)} = 1.$$

7. ▲ Полагая $\log_2 12 = a$ и учитывая, что $1 = \log_{12} 2 = \log_2 2^2 \cdot 12 = a+3$, $\log_2 24 = 1+a$, $\log_2 96 = a+4$ и $1 = \log_{12} 2 = a$, для данного выражения будем иметь $(a+1)(a+3) - a(a+4) = 3$. 8. ▲ Очевидно, что $(n+1)/n = 1 + 1/n > (n+2)/(n+1) = 1 + 1/(n+1)$. Используя свойства логарифмической функции, имеем (при $n > 1$)

$$\log_n \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+2}{n+1}, \text{ или } \log_n (n+1) - \log_n n > \log_{n+1}(n+2) - \log_{n+1}(n+1),$$

а отсюда сразу получаем, что $\log_n (n+1) > \log_{n+1}(n+2)$, $(\log_n n - \log_{n+1}(n+1) = 1)$. 9. ▲ Так как $27 > 25$, то $\log_8 27 > \log_8 25$. Но $\log_8 27 = \log_{2^3} 3^3 = \log_{2^3} 3^2 = \log_4 9$; следовательно, $\log_4 9 > \log_8 25$. 10. а) $\{5 + \log_3 7\}$; б) $\{8/7\}$; в) $\{0\}$; г) $\{2 \pm \sqrt{7/2}\}$; д) $\{10\}$; е) $\{1\}$; ж) $\{1/\sqrt{3}\}$; з) $\{5\}$; и) $\{0\}$; к) $\{\log_{1,5}(9/\sqrt{8})\}$; л) $\{-0{,}2;\ 3\}$; м) $\{3\}$; н) $\{10\}$. 11. а) $\{-1;\ 1\}$. ▲ Полагая $2^{x^2+2} = t$, приведем исходное уравнение к виду $t^2 - 9t + 8 = 0$. Решая это квадратное уравнение, получаем $t_1 = 1$, $t_2 = 8$. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $2^{x^2+2} = t_1 = 1$ и $2^{x^2+2} = t_2 = 8$. Первое из этих уравнений решений не имеет $(x^2 + 2 \neq 0$ для любого $x \in R)$, второе показательное уравнение $2^{x^2+2} = 2^3$ сводится к квадратному уравнению $x^2 + 2 = 3$, решениями которого являются $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$; б) $\{-\sqrt{2};\ -1;\ 1;\ \sqrt{2}\}$. ● Положите $3^{x-1} = t$; в) $\{20\}$; г) $\left\{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right\}$. ● Положите $2^{x\sqrt{x^2-2}} = t$. 12. а) $\{\log_{3/2} 2;\ 2\log_{3/2} 2\}$. ● Поделите уравнение на 4^x и положите $(3/2)^x = t$; б) $\{1-\sqrt{3};\ 0;\ 2;\ 1+\sqrt{3}\}$. ● Поделите уравнение на 9^{2x-x^2+1} и положите $(5/3)^{2x-x^2+1} = t$; в) $\{1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}\}$; г) $\left\{\log_{\sqrt{5\sqrt{2}-7}} 6;\ 0\right\}$. 13. а) $\{-2;\ 3\}$. ▲ Положим $3^{x^2} = u$, $3^{x+6} = v$. Исходное уравнение примет вид $u^2 - 2uv + v^2 = 0$ или $(u-v)^2 = 0$; отсюда следует, что $3^{x^2} = 3^{x+6}$. Решив показательное уравнение, получим ответ; б) $\{2;\ 4\}$. ▲ Полагая $2^{\sqrt{2x+1}} = y$, $2^x = z$, получаем $x^2y/2 + z = 2y + x^2z/4$ или $(x^2/4 - 1)(2y - z) = 0$. Отсюда имеем: $x^2/4 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ (посторонний корень), $x_2 = 2$ или $2^{\sqrt{2x+1}} + 1 = 2^x$, $\sqrt{2x+1} = x - 1 \Rightarrow x_3 = 0$ (посторонний корень), $x_4 = 4$. 14. а) $\{11\}$. ▲ Преобразуем левую часть уравнения: $4^{\log_{\sqrt{5}}(x-3)} + \log_5 5 = 4^{\log_4 3\,(x-3)} \left(2^{\log_2 5}\right)^2 = 5^2 \left(4^{\log_4 (x-3)}\right)^{1/3} = 25(x-3)^{1/3}$. Теперь имеем: $25(x-3)^{1/3} = 50$, $x - 3 = 2^3$, $x = 11$; б) $\{4\}$. 15. $\{-3;\ -1\}$. 16. а) $\{27\}$; б) $\{-1\}$. ▲ Преобразуем уравнение к виду

$$\log_2 (3-x)(1-x) = \log_{\sqrt{2}} 2^3, \qquad (1)$$

или после преобразований $x^2-4x-5=0$. Последнее уравнение имеет корни $x=-1$ и $x=5$. Поскольку уравнение (1) неравносильно исходному, то необходимо осуществить проверку полученных корней. Проверка показывает, что корень $x=5$ квадратного уравнения исходному уравнению не удовлетворяет: в) $\{4\}$; г) $\{8\}$; д) $\{2\}$; е) $\{3\}$; ж) $\{3;\ 3+\sqrt{2}\}$. ● Учтите, что $\log_3(x-4)^2 = 2\log_3|x-4|$; з) $\{-11;\ -6-\sqrt{7};\ -6+\sqrt{7};\ -1\}$; и) $\{3\}$; к) $\{-17\}$; л) $\{1\}$; м) $\{2\}$; н) $\{\sqrt{2};\ \sqrt{6}\}$. ● Воспользуйтесь тождеством $\lg^2 a = \lg^2(1/a)$. 17. а) $\left\{-2^{\frac{1}{\log_a 4a^2}};\ 2^{\frac{1}{\log_a 4a^2}}\right\}$ при $a\in\left]0;\ 1/\sqrt{2}\right[\cup\left]1/\sqrt{2};\ 1\right[\cup\left]1;\ \infty\right[$, $\varnothing$ при остальных $a\in R$; б) $\{(3a+3)/(7-a)\}$ при $a\in\left]3;\ 7\right[$, $\varnothing$ при $a\notin\left]3;\ 7\right[$; в) $\{(2a-1)/6\}$ при $a\in\left]-\infty;\ -12\right[\cup\left]\frac{1}{2};\ \infty\right[$, $\varnothing$ при $a\in[-12;\ 1/2]$. ▲ Исходное уравнение равносильно системе

$$6x^2+25x=2ax+8a-4,\quad 6x^2+25x>0.$$

Решая уравнение этой системы, находим: $x_1=-4$ (посторонний корень, так как не выполняется неравенство системы), $x_2=(2a-1)/6$. Решая далее неравенство $6((2a-1)/6)^2+25((2a-1)/6)>0$, находим допустимые значения параметра. 18. а) $\{1;\ 60\}$. ▲ При $x=1$ обе части уравнения обращаются в ноль; следовательно, $x=1$ — корень уравнения. Будем искать теперь корни уравнения, предполагая $x\neq 1$ (только при $x=1$ обе части уравнения обращаются в ноль). Для этого умножим уравнение на $1/(\log_3 x\log_4 x\log_5 x)$:

$$1=1/\log_3 x+1/\log_4 x+1/\log_5 x=\log_x 3+\log_x 4+\log_x 5.$$

Решив теперь уравнение $\log_x 3\cdot 4\cdot 5=1$, найдем другой корень $x=60$; б) $\{1;\ \sqrt[3]{3/8}\}$. ● Приведите уравнение к виду

$$\frac{1}{2}\log_2 x-\log_2 x\cdot\log_3 x-3\log_3 x=0 \qquad (1)$$

и убедитесь, что $x=1$ — корень этого уравнения; далее преобразуйте уравнение (1) к виду $\log_x 3-6\log_x 2-2=0$ и найдите другие корни. 19. а) $\{1/10;\ \sqrt{10}\}$; б) $\{1/2;\ 4\}$; в) $\{3;\ 3^9\}$; г) $\{1/625;\ 5\}$; д) $\{\sqrt[6]{5};\ 5\}$. ● Положите $\log_x\sqrt{5}=t$; е) $\{10\}$; ж) $\{-1/4\}$. ● Положите $\log_{2x+7}(2x+3)=t$; з) $\{0;\ 7/4;\ (3+\sqrt{24})/2\}$. ● Положите $\lg(4-x)=u$, $\lg(x+1/2)=v$ и разложите на множители многочлен $u^2+uv-2v^2$. 20. а) $\{2\}$. ● $\log_x 27\cdot\log_9 x=\log_x 27/\log_x 9=\log_9 27=3/2$; б) $\{1/\sqrt[3]{4};\ 8\}$. ● Положите $\log_2 x=t$; в) $\{1/\sqrt{2};\ 1;\ 4\}$. ▲ Используя формулу $\log_N M=\frac{\log_a M}{\log_a N}$, преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{\log_2 x^2}{\log_{\sqrt{2}}\frac{x}{2}}-14\frac{\log_2 x^3}{\log_2 16x}+40\frac{\log_2\sqrt{x}}{\log_2 4x}=$$

$$=\frac{2\log_2 x}{\log_2 x-1}-\frac{42\log_2 x}{\log_2 x+4}+\frac{20\log_2 x}{\log_2 x+2}.$$

Полагая теперь $\log_2 x = t$, приведем уравнение к виду $t(2t^2-3t-2)=0$, корни которого $t_1=0$, $t_2=-1/2$, $t_3=2$. Решая далее уравнения $\log_2 x = t_n$ $(n=1, 2, 3)$ и проверяя эти корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение, получаем ответ; г) $\{1/8; 1; 4\}$; д) $\{1/9; 1; 3\}$; е) $\{5\}$. 21. а) $\{a-1; a+1\}$ при $a \in]1; \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; 2[\cup]2; \infty[$, $\{3\}$ при $a=2$; б) $\{a^2\}$ при $a \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right[\cup]1; \infty[$. 22. а) $\{25\}$. ● Положите $3+\log_{0.2} x = t$; б) $\{1/9\}$; в) $\left\{\sqrt{(1+\sqrt{5})/2}\right\}$. ● Положите $\log_x (x^2+1) = t$; г) $\{2\}$. ● Положите $\sqrt{\log_2 x} = t$. 23. а) $\{3\}$; б) $\{1/3\}$; в) $\{3; 10\}$. 24. а) $\{2; 4\}$; б) $\{\log_2 (3/5); \log_2 (2/5)\}$. 25. а) $\{2\}$; б) $\{2\}$, в) $\{0\}$, г) $\{-1; 2\}$; д) $\{2\}$; е) $\{-\log_2 3\}$. 26. а) $\{-9/10; 99\}$; б) $\{1/10^3; 10^3\}$; в) $\{1000\}$; г) $\{0\}$. 27. $\{1/10; 2; 1000\}$. 28. $\{0,2; 6\}$. 29. $\{2\}$. ● Положите $2^{\log_{x^2}(3x-2)} = u$, $3^{\log_{x^2}(3x-2)} = v$ и решите уравнение $3u^2-5uv+2v^2=0$ относительно u (или v). 30. 15 при $a \in \{3\}$. 31. $\left[\frac{1}{5}; \infty\right[$. 32. $\{1/16\} \cup [4; \infty[$. ▲ Положим $\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2|=y$, тогда исходное уравнение преобразуется к виду $\log_2 \sqrt{y+6} = \log_2 \sqrt{2}\,|y|$ или $2y^2-y-6=0$, корни которого $y_1=2$ и $y_2=-3/2$. С учетом этого имеем: 1) $\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2|=y_1=2 \Rightarrow \sqrt{x}-2=|\sqrt{x}-2| \Rightarrow$ $\Rightarrow x \geqslant 4$; 2) $\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2|=y_2=-3/2 \Rightarrow 2\sqrt{x}=1/2 \Rightarrow x=1/16$. Объединяя полученные решения, найдем ответ. 33. а) $\{2\}$. ▲ Подбором устанавливаем, что $x=2$ — корень уравнения. Докажем, что других корней исходное уравнение не имеет. Преобразуем уравнение к виду $(5/13)^x+(12/13)^x=1$ и предположим, что существует его решение: $x<2$. Рассмотрим две показательные функции: $y_1=(5/13)^x$ и $y_2=(12/13)^x$, которые являются убывающими, поэтому для значений $x<2$ имеем $(5/13)^x > (5/13)^2$ и $(12/13)^x > (12/13)^2$. Складывая эти неравенства, получаем $(5/13)^x+(12/13)^x > (5/13)^2+(12/13)^2=1$, что означает отсутствие корней у данного уравнения, меньших 2. Аналогично можно доказать, что уравнение не имеет корней, больших 2; б) $\{3\}$; в) $\{0\}$. ● Для доказательства единственности решения исследуйте функции $y=2^x$ и $y=1-x$ на интервалах $]-\infty; 0[$ и $]0; \infty[$; г) $\{3\}$. 34. а) $\{(2; 3/2)\}$; б) $\{(a^{66/5}; |a|^{72/5})\}$ при $a \neq 0$, $|a| \neq 1$; в) $\{(1/2; 1/2)\}$. 35. а) $\{(9/2; 1/2)\}$; б) $\{8; 1\}$. 36. а) $\{(3/2; 1/2)\}$. ● Прологарифмируйте второе уравнение системы по основанию 2; б) $\{(\sqrt[4]{3}; -1); (\sqrt[4]{3}; 1)\}$. 37. а) $\{(18; 2); (2; 18)\}$; б) $\{(20; 5)\}$; в) $\{(3; 6); (6; 3)\}$; г) $\{(4; -1/2)\}$. ● Положите $\log_2 x = u$, $4^{-y} = v$; д) $\{(0,1; 2); (100; -1)\}$. ● Прологарифмируйте второе уравнение системы по основанию 10; е) $\{(2; 10); (10; 2)\}$; ж) $\{(2; 1/6)\}$; з) $\{(9a/2; a/2); (a/2; 9a/2)\}$ при $a \in]0; 1[\cup]1; \infty[$. 38. а) $\{(2; 4); (4; 2)\}$. ● Положите в первом уравнении системы $\log_x y = Z$; б) $\{(a^2; a); (a; a^2)\}$ при $a \in]0; 1[\cup]1; \infty[$, $\{((a+1)^2; -(a+1)); (-(a+1); (a+1)^2)\}$ при $a \in]-\infty; -2[\cup]-2; -1[$, $\varnothing$ при $a \in \{-2; 1\} \cup [-1; 0]$.

39. $\{(3; 9); (9; 3)\}$. 40. $\{(3; 2)\}$. 41. $\{(-2; -2); (2; 2)\}$. 42. $\{(12; 4)\}$. 43. $\{(5; 1/2)\}$. 44. $\{(64; 1/4)\}$. 45. $\{(-2; 4)\}$. ● При решении системы учтите, что $y \in N$. 46. а) $[-1; 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}; 3]$. ▲ Исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$x^2-2x-2>0, \quad x^2-2x-2\leqslant 1.$$

Решением первого неравенства являются $x \in]-\infty; 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}; \infty[$, второго $-x \in [-1; 3]$. Пересечением этих множеств решений является множество значений $x \in [-1; 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}; 3]$; б) $]2; 9[$; в) $]-4; -3[\cup]0; 1[$; г) $]4; 6[$; д) $]-\infty; -2[\cup]-1/2; \infty[$; е) $]-2; -2/3[$; ж) $[0; 2-\sqrt{2}[\cup]2+\sqrt{2}; 6]$; з) $]3/4; 4/3[$. 47. а) $]-\infty; -2,5[\cup]0; \infty[$; б) $]-1-\sqrt{2}; -2[\cup]0; \sqrt{2}-1[$; в) $]-\infty; 2-\sqrt{2}[\cup]2+\sqrt{2}; \infty[$; г) $]-\infty; -2[\cup]5/8; \infty[$; д) $[-7; -\sqrt{35}[\cup]5; \sqrt{35}[$. 48. а) $]2; 7[$. ▲ Так как основанием логарифмов левой и правой частей неравенства служит одно и то же число, большее единицы, то исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$2x-4>0, \quad x+3>2x-4,$$

решив которую получим ответ; б) $]-\sqrt{5}; -2[\cup]1; \sqrt{5}[$. ● Исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$x^2+x-2>0, \quad x^2+x-2<x+3;$$

в) $]-1; 1[\cup]3; \infty[$; г) $[(1-\sqrt{5})/2; (1+\sqrt{5})/2]$. ● Преобразуйте левую часть неравенства к виду $\log_2 (x+1)^{-1}$; д) $]-1; 1+2\sqrt{2}[$. 49. а) $]2; 7[\cup]22; 27[$. ▲ Исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$x-2>0, \quad 27-x>0, \quad \lg (x-2)(27-x)<2,$$

которая равносильна системе неравенств

$$2<x<27, \quad 0<(x-2)(27-x)<100,$$

решив которую получим ответ; б) $]2; 4[$; в) $]1; 11/10[$; г) $[-1; 4[$; д) $]-4; -1-\sqrt{3}]\cup]0; \sqrt{3}-1]$; е) $]3; 5]$; ж) $]2; 5[$; з) $]-\infty; -1[\cup]2; \infty[$. 50. а) $]\log_2 5; \infty[$; б) $]-1; 7[$; в) $]1-\sqrt{5}; -1[\cup]3; 1+\sqrt{5}[$; г) $]-\infty; 0[\cup]3; \infty[$; д) $]2; \infty[$; е) $]-\infty; -8[\cup]4; \infty[$; ж) $]0; \infty[$ при $a \in]-\infty; 0[$, $](a \log_3 2)^2; \infty[$ при $a \in [0; \infty[$. 51. а) $]0; 10^{-4}[\cup]10, \infty[$. ▲ Полагая $\lg x=t$, получаем неравенство $t^2+3t-4 \geqslant 0$, которое равносильно совокупности неравенств

$$\begin{cases} t \leqslant -4, \\ t \geqslant 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \lg x \leqslant -4, \\ \lg x \geqslant 1, \end{cases}$$

решив которую получим ответ; б) $]0; 1/2[\cup[\sqrt{2}; \infty[$. ● Положите $\log_2 x=t$; в) $]0; 1[\cup]\sqrt{3}; 9[$; г) $]1/16; 1/8[\cup]8; 16[$. ● Положите $\log_4^2 x=t$; д) $]0; 1/\sqrt{27}]\cup[1/3; \sqrt{243}]\cup[27; \infty[$. ● По-

ложите $2\log_3^2 x - 3\log_3 x - 7 = t$; в) $]1/16;\ 1/4[\cup]1/2;\ 2[$; ж) $]0;\ 1/2[\cup]32;\ \infty[$. 52. а) $\left]\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2};\ \infty\right[$. ● Положите $2^{2x+1} = t > 0$; б) $]-1;\ \infty[$. ● Положите $10^x = t > 0$; в) $]\log_5(3-\sqrt{5})/2;\ \log_5(3+\sqrt{5})/2[$; г) $]-\infty;\ 1-\log_5 3\sqrt{5}]$. ● Положите $3^{2-3x} = t > 0$; д) $]-\infty;\ 0[\cup]\log_2 3;\ \infty[$; е) $]0,01;\ \infty[$. ● Положите $3^{\lg x+2} = t > 0$; ж) $]-\infty;\ -1[\cup]-0,1;\ 0[$. ● Положите $2^{\lg(-x)} = t > 0$. 53. а) $]\log_2(5+\sqrt{33})-1;\ \infty[$; б) $]-\infty,\ 0] \cup [\log_8 5;\ 1[$; в) $]\log_5(\sqrt{2}+1);\ \log_5 3[$. ● Положите $\log_{\sqrt{2}}(5^x-1) = t$; г) $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ \infty[$. 54. а) $[2;\ +\infty[$; б) $[28/3;\ \infty[$; в) $[\log_3(83/19);\ \infty[$. 55. а) $]-3;\ -\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6};\ 3[$; б) $]-1/2;\ 2[$. 56. а) $[-3;\ 1[$; б) $]-4;\ (1+\sqrt{17})/2[$. 57. а) $]0;\ 2[\cup]4;\ \infty[$; б) $]1000;\ \infty[$; в) $]0;\ 1/4] \cup [4;\ \infty[$. 58. а) $](1+\sqrt{1+4a^2})/2;\ \infty[$ при $a \in]1;\ \infty[$; $]1;\ (1+\sqrt{1+4a^2})/2[$ при $a \in]0;\ 1[$. ▲ Необходимо рассмотреть случаи $a > 1$ и $0 < a < 1$. Если $a > 1$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$x > 1, \quad x(x-1) > a^2.$$

Корни квадратного трехчлена $x^2 - x - a^2$ суть $x_1 = (1-\sqrt{1+4a^2})/2$ и $x_2 = (1+\sqrt{1+4a^2})/2$, и решениями второго неравенства системы служат $x \in]-\infty;\ x_1[\cup]x_2;\ \infty[$. Но $x_1 < 0$, поэтому решением системы будет промежуток $]x_2;\ \infty[$ ($x_2 > 1$ при $a > 1$). Аналогично рассматривается случай, когда $0 < a < 1$. Имеем систему

$$x > 1, \quad x^2 - x - a^2 < 0.$$

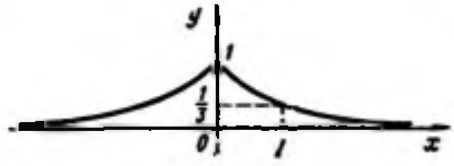
Решениями второго неравенства системы являются $x \in]x_1;\ x_2[$. С учетом первого неравенства системы получаем $x \in]1;\ x_2[$; б) $]0;\ a^6[\cup]a^3;\ a^2[\cup]1/a;\ \infty[$; в) $]1/a;\ a^4[$ при $a \in]1;\ \infty[$, $]a^4;\ 1/a[$ при $a \in]0;\ 1[$; г) $[\log_2(4+\sqrt{16+a^2});\ 3\log_2 2[$ при $a \in]0;\ 1]$, $[\log_2(4+\sqrt{16+a^2});\ \infty[$ при $a \in]1;\ \infty[$. 59. а) $]3;\ 4[\cup]5;\ \infty[$. ▲ Исходное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x-3 > 1, \\ 0 < x-1 < (x-3)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x-3 < 1, \\ x-1 > (x-3)^2 > 0. \end{cases}$$

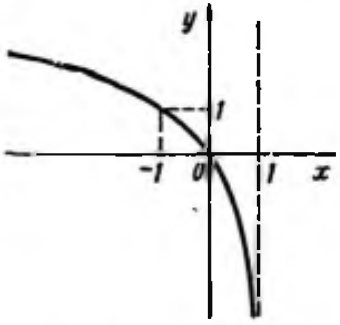
Первая система имеет решения $x \in]5;\ \infty[$, вторая — $x \in]3;\ 4[$; объединяя эти решения, получаем ответ; б) $]1;\ 2[$. 60. а) $]0;\ 1/2[\cup]1;\ 2[\cup]3;\ 6[$; б) $]-3;\ -2[\cup]-1;\ 0[\cup]1;\ 3[$; в) $]-4/3;\ -23/22[$; г) $]-2;\ -3/2[\cup [-1;\ 3[$; д) $]1/5;\ 1/2[$. 61. в) $]-3;\ -1[$; б) $]0;\ (\sqrt{13}-3)/2[\cup]1;\ \infty[$. 62. $[-1;\ 1/2[\cup]1;\ 2[\cup]2;\ 7/2[$. 63. $]3;\ 5-\sqrt{3}[\cup]7;\ \infty[$. 64. а) $]1;\ 2[$; б) $]0;\ 3[\cup]4;\ 6[\cup]6;\ 12[\cup]14;\ \infty[$. 65. а) $]0;\ 4[$; б) $[2,\ 4[$; в) $]1/2,\ 4[$; г) $]1;\ 2[$. 66. а) $]0,\ 2[$. ● Приведите неравенство к виду $(2^x-1)(25-5^x) > 0$; б) $]1/\sqrt{5};\ 1[\cup]3;\ \infty[$. ● Приведите неравенство к виду $((\log_3 x - 1)(2\log_3 x + 1))/\log_3 x > 0$; в) $]-1;\ \infty[$. 67. а) $\{8\}$. ● Докажите, что $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5 - 1)\right) < 0$; б) $\{4\}$. 68. $]0;\ 1/a^3[$ при $a \in]1;\ \infty[$,

$]0;\ a^a[$ при $a \in]0;\ 1[$. 69. Функции, перечисленные в пунктах а), б), е), — четные; функции, перечисленные в пунктах в), г), д), ж), з), — нечетные. 70. $3^x = (3^x + 3^{-x})/2 + (3^x - 3^{-x})/2$. ▲ Пусть $f_1(x) = f_1(-x)$ и $f_2(x) = -f_2(-x)$. Тогда $3^x = f_1(x) + f_2(x)$ (1), а $3^{-x} = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x)$ (2). Решив систему уравнений (1) и (2) относительно $f_1(x)$ и $f_2(x)$, получим: $f_1 = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$, $f_2(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$. 71. $T = 2\pi$; нет. 72. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

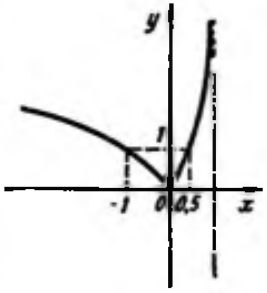
73.



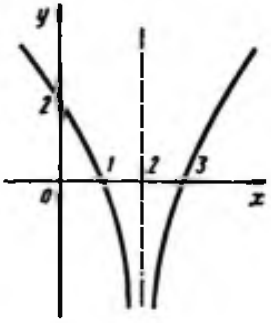
74.



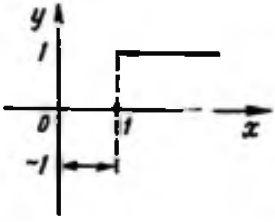
75.



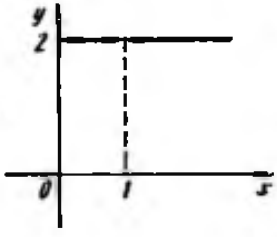
76.



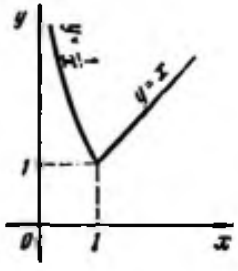
77.



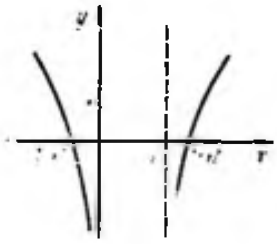
78.



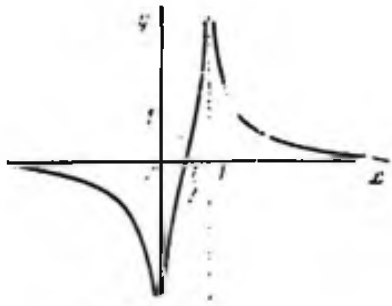
79.



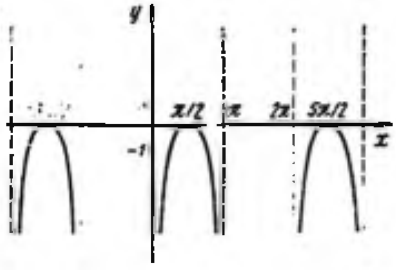
80.



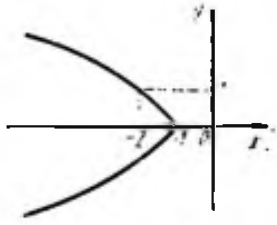
81.



82.



83.



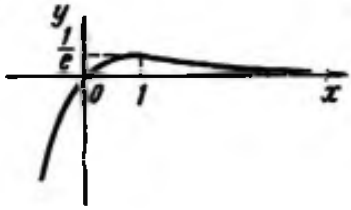
84. а) $3^x \ln 3$; б) $10^x \ln 10$; в) $\frac{1}{2^x} \ln \frac{1}{2}$; г) $e^x - e^{-x}$; д) $2e^x + e^{-x}$; е) $3^x \ln 3 + 4^x \ln 4$; ж) $10^x (1 + x \ln 10)$; з) $e^x (1 + x)$; и) $e^{-x} (1 - x)$; к) $\sqrt{2^x} \ln \sqrt{2}$; л) $e^{x^3 - 5x^2} (3x^2 - 10x)$; м) $xe^x/(1 + x)^2$. 85. а) $1/(x \ln 3)$; б) $(1/x)(1/\ln 2 - 1/\ln 3)$; в) $1/(2x \ln 5)$; г) $5/(x \ln 7)$; д) $1 + 1/x$; е) $\ln x + 1$; ж) $(2 \ln x)/x$; з) $1/(2x \sqrt{\ln x})$; и) $-2/(x(1 + \ln x)^2)$; к) $(1 + x^2 - 2x^2 \ln x)/(x(1 + x^2)^2)$. 86. а) $32 \ln 2$; б) $-1/3$; в) $1{,}2$; г) 3. 87. а) $y = x + 1$; б) $y = x - 1$. 88. а) $\{0\}$; б) $\{-1; 3\}$; в) $\{-2; -1\}$; г) $\{-1{,}2; 1\}$; д) $\{-\ln a\}$ при $a \in]0; \infty[$, при $a \in]-\infty; 0]$ функция критических точек не имеет ▲ Дифференцируя и приравнивая нулю производную, получаем уравнение $e^{-2x} - (a - 3)e^{-x} - 3a = 0$, откуда $e^{-x} = -3$ и $e^{-x} = a$. Первое уравнение не имеет действительных решений, второе $-x = \ln a$, если $a > 0$. При $a \leqslant 0$ второе уравнение также не имеет действительных корней; е) $\{\log_{0,2}(-a)\}$ при $a \in]-\infty; 0[$; при $a \in [0; \infty[$ функция критических точек не имеет; ж) $\{0; \ln 2\}$. 89. а) $\{2\}$; б) $\{e^3\}$; в) $\{-4; 1\}$. 90. $]2/3; 4/3[$ и $]2; \infty[$. 91. $]3 - \sqrt{1 + 1/(3e)}; 2[$ и $]4; 3 + \sqrt{1 + 1/(3e)}[$. 92. а) Возрастает на $]-\infty; 0[$; убывает на $]0, \infty[$; б) возрастает на $]e; \infty[$, убывает на $]0; 1[$ и $]1; e[$; в) возрастает на $]\log_2(3/2); \infty[$, убывает на $]-\infty; \log_2(3/2)[$. 93. а) $x = 1$ — точка максимума; $x = e$ — точка минимума; б) функция точек экстремума не имеет. 94. $\{-2/3; -1/6\}$. ▲ $f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$, $f'(1) = f'(2) = 0$; следовательно, имеем систему

$$a + 2b = -1, \quad a/2 + 4b = -1.$$

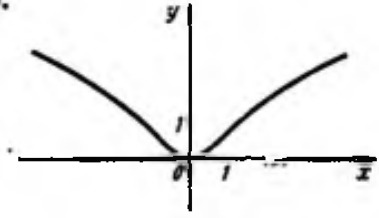
Решая эту систему относительно a и b, находим $a = -2/3$, $b = -1/6$. Таким образом, $f'(x) = -2/(3x) - x/3 + 1$, и проверкой убеждаемся, что в точках $x = 1$ и $x = 2$ производная меняет знак,

95. а) $\max\limits_{[-4;\,4]} y = y(-4) = 7e^{4}$, $\min\limits_{[-4;\,4]} y = y(-2) = -3e^{2}$;
б) $\max\limits_{[-1;\,2]} y = y(2) = 17/(4\ln 2)$, $\min\limits_{[-1;\,2]} y = y(0) = 2/(\ln 2)$;
в) $\max\limits_{[-1;\,1]} y = y(1) = 24$, $\min\limits_{[-1;\,1]} y = y(0) = 0$; г) $\max\limits_{[1/2;\,4]} y = y(4) = 21 + 3\ln 2$, $\min\limits_{[1/2;\,4]} y = y(1) = 0$. 96. 0. 97. а) $]3,5;\ \infty[$; б) $]-\ln 2;\ \ln 2[$. 98. а) ▲ Рассмотрим функцию $f(x) = e^{x} - x - 1$. Имеем $f'(x) = e^{x} - 1 > 0$ для $x \in]0;\ \infty[$, $f(0) = 0$, следовательно, для всех x из указанного промежутка $f(x) > 0$. б) ◉ Исследуйте знак производной функции $f(x) = x - \ln(1 + x)$ на заданном промежутке.

99.



100.



§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

2. а) $\sqrt{2-a^2}$; б) $1 - (a^2-1)^2/2$. ◉ $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2(\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - 2((a^2-1)/2)^2$. 3. а) $p^2 - 2$; б) $p^3 - 3p$. 4. а) $(4\sqrt{3}+3)/10$; б) $(\sqrt{3(1-b^2)} - b)/2$. ▲ Полагая $40^\circ + \alpha = \beta$, получаем $\cos(70^\circ + \alpha) = \cos(30^\circ + \beta) = (\sqrt{3}/2)\cos\beta - (1/2)\sin\beta$. Так как $0^\circ < \alpha < 45^\circ$, то $\cos\beta > 0$ и поэтому $\cos\beta = \sqrt{1-b^2}$. Окончательно имеем $\cos(30^\circ + \beta) = \sqrt{3(1-b^2)}/2 - b/2$; в) $1073/1105$. ◉ $\sin(\alpha+\beta-\gamma) = \sin(\alpha+\beta)\cos\gamma - \cos(\alpha+\beta)\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; г) $-117/125$; $44/125$; $-117/44$. ◉ $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha = 3\cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \dfrac{3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha}{\cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha} = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$. 5. ◉ Используйте равенство $\alpha + \beta = \pi - \gamma$. 7. а) $\operatorname{tg} 2\alpha$; б) $-\operatorname{tg}\alpha$; в) $\operatorname{tg} 2\alpha$; г) $\operatorname{cosec}\alpha$; д) $-1/2$. ▲ $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}\right) =$

$$= \frac{\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) + \left(\sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}\right) - \sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$= -\frac{1}{2}$; е) 1. ● Приведите выражение к виду $\frac{\sin\frac{13}{14}\pi - \sin\left(-\frac{\pi}{14}\right)}{2\sin\frac{\pi}{14}}$.

8. ж) ▲ Имеем: $16\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ = 16\cos 80^\circ \cos 60^\circ \times$
$\times \cos 40^\circ \cos 20^\circ = 8\cos 80^\circ \cos 60^\circ \cos 40^\circ \frac{2\cos 20^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} =$
$= 4\cos 80^\circ \cos 60^\circ \frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 20^\circ} = 2\cos 60^\circ \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} =$
$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 160^\circ)}{\sin 20^\circ} = 1$; з) ● Используйте формулы $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$, $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$; л) ● $1 \pm \sin\alpha =$
$= (\sin(\alpha/2) \pm \cos(\alpha/2))^2$. 9. 1/3. ▲ $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)} +$
$+ \frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)} = 1{,}4$; отсюда получаем: $2{,}4\operatorname{tg}^2(\alpha/2) - 2\operatorname{tg}(\alpha/2) +$
$+ 0{,}4 = 0$, $\operatorname{tg}(\alpha/2) = 1/3$ и $\operatorname{tg}(\alpha/2) = 1/2$. Последнее значение $(\operatorname{tg}(\alpha/2) = 1/2)$ не удовлетворяет условию $0 < \alpha/2 < \pi/8$ $(\operatorname{tg}(\pi/8) =$
$= \sqrt{2} - 1 < 1/2)$. 10. π. ▲ Из условия задачи следует, что $0 < \alpha+\beta+\gamma < 3\pi/2$, $0 < \frac{\beta+\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} < 1$ (α, β, γ — положительные острые углы), поэтому можно провести следующие преобразования:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}}{1 - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

т. е. $\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 0$, а отсюда следует, что

$$\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 0,$$

что возможно лишь при $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$ (из условия видно, что $0 < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} < \frac{3\pi}{4}$, т. е. $\alpha+\beta+\gamma = \pi$). 11. в) $(\sqrt{2-\sqrt{2}})/2$. ● $\cos 292^\circ 30' = \sin 22^\circ 30' = \sqrt{(1-\cos 45^\circ)/2}$; б) 4. ▲ $\operatorname{cosec} 10^\circ -$
$- \sqrt{3}\sec 10^\circ = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{4\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 20^\circ} = 4$;
в) $\sqrt{3}$. ▲ $\frac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - 2\sin 30^\circ \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} =$
$= \frac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\cos 30^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}$; г) 4. ▲ $-2\sqrt{2}\times$
$\times (2\sin 35^\circ \sin 10^\circ - \sin 5^\circ - 2\cos 5^\circ \cos 40^\circ) = -2\sqrt{2}(\cos 25^\circ -$

$-\sin 5^\circ - \cos 35^\circ - 2\cos 45^\circ) = -2\sqrt{2}(2\sin 30^\circ \sin 5^\circ - \sin 5^\circ - \sqrt{2}) =$
$= 4$; д) $3/4$. ▲ $\cos^2 73^\circ + \cos^2 47^\circ + \cos 73^\circ \cos 47^\circ = 0{,}5\,(1 +$
$+ \cos 146^\circ + 1 + (\cos 94^\circ + \cos 26^\circ) + \cos 120^\circ) = 0{,}5\,(3/2 + 2\cos 60^\circ \times$
$\times \cos 34^\circ - \cos(180^\circ - 146^\circ)) = 1/2 \cdot 3/2 = 3/4$; е) $-1/2$. ▲ $(\sin 6^\circ -$
$- \sin 66^\circ) + (\sin 78^\circ - \sin 42^\circ) = 2\cos 60^\circ \sin 18^\circ - 2\sin 30^\circ \cos 36^\circ =$
$= \sin 18^\circ - \sin 54^\circ = \dfrac{-2\cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} \cos 18^\circ = -\dfrac{2\cos 36^\circ \sin 36^\circ}{2\cos 18^\circ} =$
$= -\dfrac{\sin 72^\circ}{2\cos 18^\circ} = -\dfrac{1}{2}$; ж) $-1/\sqrt{2}$; з) 1; и) 0. ● $\operatorname{tg}^2 20^\circ =$
$= (1 - \cos 40^\circ)/(1 + \cos 40^\circ)$; к) $1/5$. ▲ $(\operatorname{ctg}^2 36^\circ \operatorname{ctg}^2 72^\circ - 1) + 1 =$
$= 1 + \dfrac{\cos 108^\circ \cos 36^\circ}{\sin^2 36^\circ \sin^2 72^\circ} = 1 - (\operatorname{ctg} 36^\circ \operatorname{ctg} 72^\circ)^2 \dfrac{1}{\cos 36^\circ \cos 72^\circ} =$
$= 1 - \operatorname{ctg}^2 36^\circ \operatorname{ctg}^2 72^\circ \dfrac{2 \cdot 2\sin 36^\circ}{\sin 144^\circ} = 1 - 4\operatorname{ctg}^2 36^\circ \cdot \operatorname{ctg}^2 72^\circ$. Имеем
равенство $\operatorname{ctg}^2 36^\circ \operatorname{ctg}^2 72^\circ = 1 - 4\operatorname{ctg}^2 36^\circ \operatorname{ctg}^2 72^\circ$ или $5\operatorname{ctg}^2 36^\circ \times$
$\times \operatorname{ctg}^2 72^\circ = 1$, откуда получаем ответ. 12. а) $x^2/9 + y^2/16 = 1$;
б) $y = 4 - x^2$; в) $y - x = 1$; г) $x^2 + y^2 = 2$.

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. а) $D(y) = \bigcup\limits_{n \in Z}]-\pi/4 + \pi n/2;\ \pi/4 + \pi n/2[$;

б) $D(y) = \bigcup\limits_{n \in Z}]3\pi n;\ 3\pi(n+1)[$;

в) $D(y) = \bigcup\limits_{n \in Z}]\pi n - \pi/2;\ \pi n + \pi/2[$;

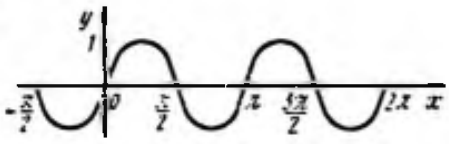
г) $D(y) = \bigcup\limits_{n \in Z}]\pi n;\ \pi(n+1)[$.

2. а) $E(y) = [-1;\ 3]$; б) $E(y) = [-2;\ 8]$; в) $E(y) =]-4;\ 4[$;
г) $E(y) = [-3;\ 3]$; д) $E(y) = [-1;\ 1]$; е) $E(y) = [0;\ \infty[$;
ж) $E(y) = [-1;\ 1]$; з) $E(y) =]\cos 1;\ 1]$; и) $E(y) = [\cos 2;\ 1]$;
к) $E(y) = [-1;\ 1]$; л) $E(y) = [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$;
м) $E(y) = [-12;\ 14]$.

3. а) $\max\limits_{x \in R} y = \sqrt{a^2 + b^2} + c$; $\min\limits_{x \in R} y = c - \sqrt{a^2 + b^2}$. ▲ Заданную функцию преобразуем: $c + a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \times$
$\times \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x\right) + c = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) + c$.
Очевидно, что функция y принимает наименьшее значение, если $\sin(\varphi + x) = -1$, и наибольшее, если $\sin(x + \varphi) = 1$; б) $\max\limits_{x \in R} y = 11$,
$\min\limits_{x \in R} y = +1$. ● $y = 5(1 + \cos 2x) - 3\sin 2x + (1 - \cos 2x) =$
$= 4\cos 2x - 3\sin 2x + 6$. 4 $[2\sqrt{2};\ \infty[$. 5. $\min\limits_{x \in R} y = 1$. ● Приведите функцию к виду $y = (\sin 3x + \sin 2x)^2 + 1$. 6. ● Докажите, что произведение четной и нечетной функций $(\sin x \cos 2x) -$

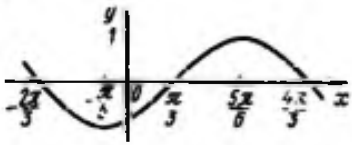
функция нечетная, и затем — что сумма трех нечетных функций есть функция нечетная. 7. ● Докажите, что произведение двух нечетных функций ($\sin^3(x/2)\sin x$) — функция четная; далее докажите, что сумма трех четных функций есть функция четная. 8. а) $2\pi/3$. ▲ Пусть постоянное число $T \neq 0$ — период данной функции. Тогда $\sin 3x = \sin 3(x+T)$ или $2\cos\left(3x+\frac{3T}{2}\right)\sin\frac{3T}{2}=0$ для любого $x \in R$. Очевидно, что в этом случае это возможно лишь если $\sin(3T/2)=0$, т. е. $3T/2=\pi n$, $n \in Z$. А так как требуется найти наименьшее положительное число T, то такое число найдется из уравнения $3T/2=\pi\ (n=1)$; б) 2π. ● Представьте функцию в виде $y=(\sin x+\sin 2x+\sin 5x)/\cos 2x$; в) 4π; г) π. ● $\cos^2 x=1/2+(\cos 2x)/2$; д) 2π; е) π; ж) 70π. 9. ● Покажите, что для этой функции не выполняются условия определения периодической функции. 10. $\{-2;\ -1;\ 1;\ 2\}$. 11. ● Докажите, что $\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$ для любых $x_1,\ x_2 \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $x_2>x_1$.

12. а)

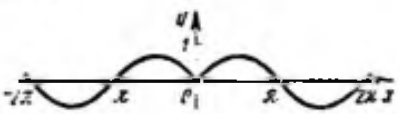


12. б)

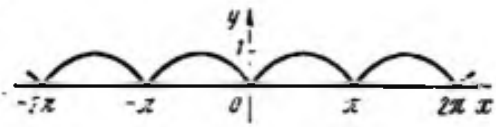
12. в)



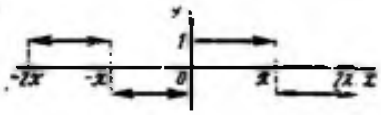
12. г)



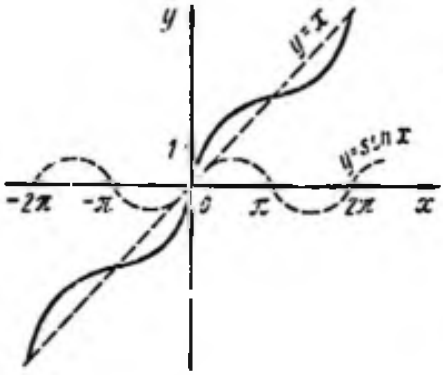
12. д)



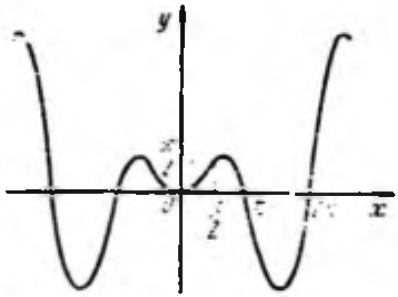
12. е)



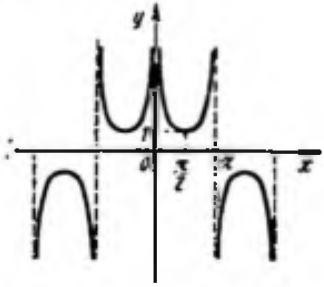
12. а)



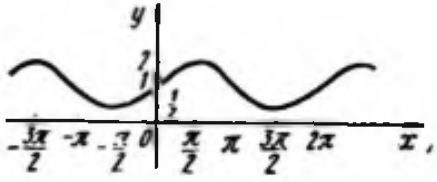
12. б)



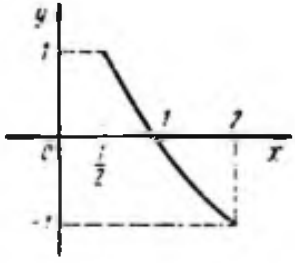
12. в)



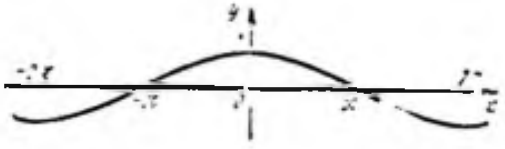
12. к)



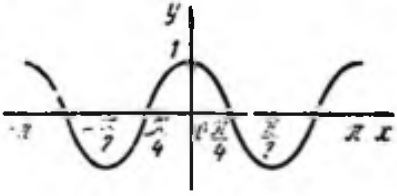
12. л)



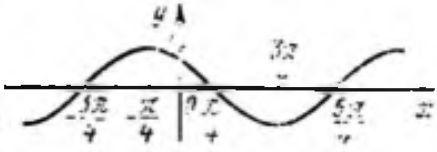
13. а)



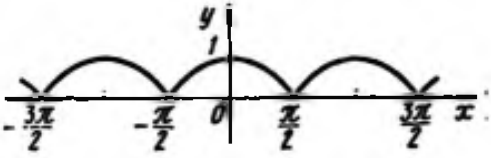
13. б)



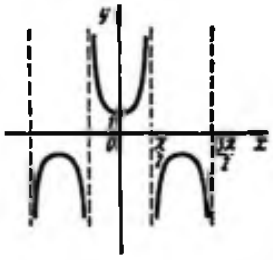
13. в)



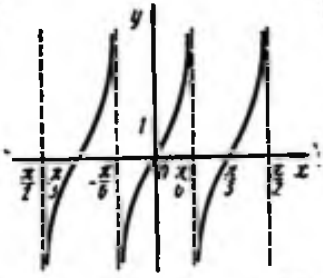
13. г)



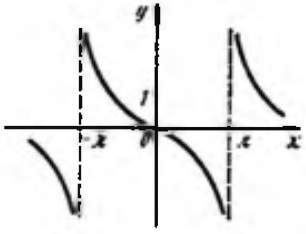
13. д)



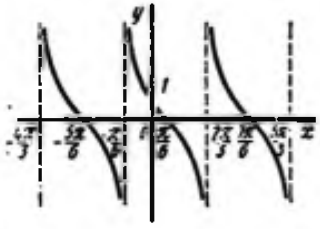
14. а)



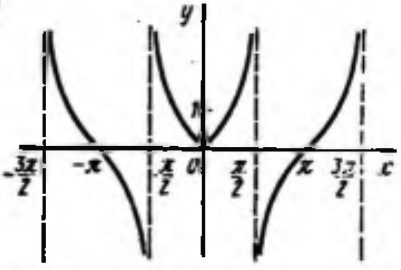
14. б)



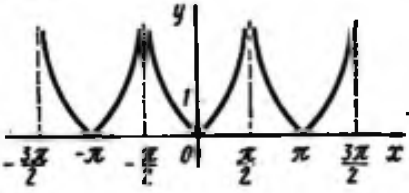
14. в)



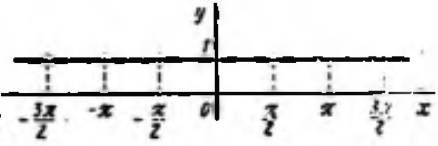
14. г)



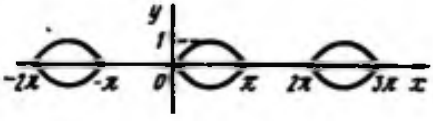
14. д)



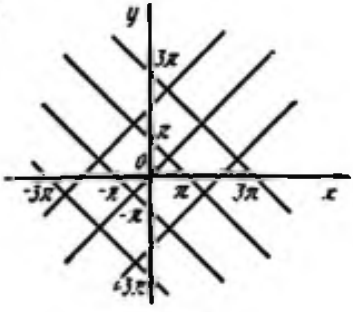
14. е)



15. а)



15. б)



16. а) $\cos x+\sin x$; б) $-(4\cos 2x/\sin^2 2x)$; в) $\sin 2x$; г) $-\sin 2x$; д) $\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}^2 x+1)$; е) $-\operatorname{ctg}^3 x(\operatorname{ctg}^2 x+1)$; ж) $3\cos 3x$; з) $(-1/\sqrt{2})\sin(x/\sqrt{2})$; и) $2\sin(4x-2)$; к) $[-3\cos^2(x^2+x)\times$ $\times\sin(x^2+x)](2x+1)$; л) $1/(1+\cos x)$. 17. а) $\sqrt{3}/2$; б) -2; в) 3. 18. а) $y-2=0$; б) $y-1/2=\pi/4-x$; в) $y-1=4(x-\pi/8)$. 19. $\max\limits_{x\in R} y=21$; $\min\limits_{x\in R} y=-19$. 20. 3/4. ▲ Так как $f'(x)=0$ при любых $x\in R$, то $f(x)=\text{const}$, и значение константы можно найти, подставив любое значение x, например $x=0$.

§ 6. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. а) $D(y)=[0;\ 2]$; б) $D(y)=[2;\ 6]$; в) $D(y)=[-1-\sqrt{2};\ \sqrt{2}-1]$; г) $D(y)=]-\infty;\ \infty[$; д) $D(y)=]-\infty;\ \infty[$; е) $D(y)=]-\infty;\ \infty[$. ◀ Для нахождения области определения функции $y=\arcsin f(x)$ ($y=\arccos f(x)$) решите неравенство $|f(x)|\leqslant 1$. 2. а) $D(y)=]-\infty;\ \infty[$; б) $D(y)=[0;\ \infty[$; в) $D(y)=]0;\ \infty[$; г) $D(y)=]-\infty;\ \infty[$. 3. а) $E(y)=[0;\ \pi/2]$; б) $E(y)=]\pi/2;\ \pi]$; в) $E(y)=]0;\ \pi/2[$; г) $E(y)=[\pi/4;\ \pi[$. 4. а) ▲ Полагая $|x|=t$, где $x\in[-1;\ 1]$ и $t\in[0;\ 1]$, по определению получим $\sin(\arcsin t)=t=|x|$; б) ▲ Пусть $\arcsin x=\alpha$, причем

$$\alpha\in[-\pi/2;\ \pi/2]. \qquad (1)$$

Таким образом, надо найти значение $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=x$. Из основного тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ или $\cos^2\alpha=1-x^2$ имеем $|\cos\alpha|=\sqrt{1-x^2}$. А так как значения α удовлетворяют условию (1), то $\cos\alpha=\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$; в) ▲ Так как $\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\arcsin x)=x/\sqrt{1-x^2}$ при $x\in]-1;\ 1[$. 5. а) $4\sqrt{2}/9$. ▲ Пусть $\arcsin\frac{1}{3}=\alpha$, тогда $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)=$ $=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot(1/3)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{9}}=4\sqrt{2}/9$; б) 7/9; в) $4\sqrt{2}/7$; г) 23/27. ▲ $\sin(3\arcsin(1/3))=\sin 3\alpha=3\sin\alpha-$ $-4\sin^3\alpha=(3/3)-4\cdot 1/27=23/27$; д) $\sqrt{2}/4$. ▲ Если обозначить $\arcsin\sqrt{63}/8=\beta$, то $\sin\beta=\sqrt{63}/8$, $\cos\beta=\sqrt{1-63/64}=1/8$. Найдем теперь $\cos(\beta/2)=\sqrt{(1+\cos\beta)/2}=\sqrt{9/16}=(3/4)$ ($\beta/2\in$ $\in]0;\ \pi/4[$); по формуле $\sin(\beta/4)=\sqrt{(1-\cos(\beta/2))/2}$ находим $\sin\left(\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{63}}{8}\right)=\sqrt{\frac{1-3/4}{2}}=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. 6. б) ▲ Пусть

$$\arccos x=\alpha,\quad \alpha\in[0;\ \pi]. \qquad (1)$$

Из основного тождества имеем $\sin^2\alpha=1-x^2$ или $|\sin\alpha|=$ $=\sqrt{1-x^2}$ или в силу (1) $\sin\alpha=\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$; в) $\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}/x$, $x\in[-1;\ 0[\cup]0;\ 1]$. 7. а) $-11/16$. ▲ Введем обозначение $\arccos(1/4)=\alpha$. Тогда имеем $\cos(3\arccos(1/4))=\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\frac{4}{64}-\frac{3}{4}=$ $=-\frac{11}{16}$; б) 2/3; в) 1/4. 8. б) ▲ Пусть $\operatorname{arctg} x=\alpha$, $\alpha\in]-\pi/2;\ \pi/2[$.

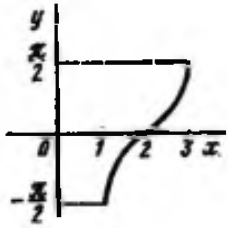
Тогда $\operatorname{tg}\alpha = x$ и из тождества $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 1/\cos^2\alpha$ с учетом (1) находим $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 1/\sqrt{1+x^2}$. 9. а) 3/5. ▲ Введем обозначения $\operatorname{arctg} 3 = \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Тогда получим $\sin(2\operatorname{arctg} 3) = \sin 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha/(1+\operatorname{tg}^2\alpha) = 2\cdot 3/(1+3^2) = 3/5$;

б) $-3/4$; в) $\sqrt{(10-\sqrt{10})/20}$. ▲ $\sin(\alpha/2) = \sqrt{(1-\cos\alpha)/2} =$
$= \sqrt{(1-1/\sqrt{1+9})/2} = \sqrt{(\sqrt{10}-1)/2\sqrt{10}} = \sqrt{(10-\sqrt{10})/20}$;

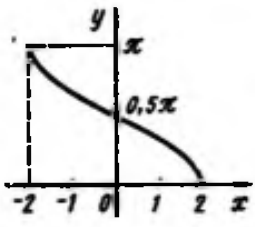
г) $\sqrt{(26+\sqrt{26})/52}$; д) $3/\sqrt{10}$. 10. б) ▲ Пусть $\operatorname{arcctg} x = \alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha = x$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = 1/\operatorname{ctg}\alpha = 1/x$. 11. а) ▲ Пусть $\arcsin x = \arccos y$ (что возможно, так как $0 \leqslant x \leqslant 1$). Тогда $\cos(\arccos y) = \cos(\arcsin x)$, $y = \sqrt{1-x^2}$, т. е. $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$. 12. а) $\arccos(4/5)$; $\operatorname{arctg}(3/4)$; $\operatorname{arcctg}(4/3)$; б) $\arcsin(5/13)$; $\operatorname{arctg}(5/12)$, $\operatorname{arcctg}(12/5)$; в) $\arcsin(5/13)$; $\arccos(12/13)$; $\operatorname{arcctg}(12/5)$; г) $\arcsin(4/5)$; $\arccos(3/5)$; $\operatorname{arctg}(4/3)$. 13. а) ▲ Положим $\arcsin(-x) = \alpha$, $\alpha \in [-\pi/2; \pi/2]$. Тогда $\sin\alpha = -x$ или $-\sin\alpha = \sin(-\alpha) = x$, откуда следует, что $-\alpha = \arcsin x$ или $\alpha = \arcsin(-x) = -\arcsin x$; в) ▲ Пусть $\arccos(-x) = \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$, тогда $\cos\alpha = -x$ или $-\cos\alpha = \cos(\pi-\alpha) = x$. Так как $0 \leqslant \pi - \alpha \leqslant \pi$, то $\pi - \alpha = \arccos x$, т. е. $\alpha = \arccos(-x) = \pi - \arccos x$. 14. а) $\pi - \arcsin(2\sqrt{2}/3)$; $\pi - \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$; $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{2}/4)$; $\pi - \operatorname{arcctg}(\sqrt{2}/4)$; $\pi - \arccos(1/3)$; б) $\arcsin(-7/25)$; $-\arccos(24/25)$; $-\operatorname{arctg}(24/7)$; $-\operatorname{arcctg}(7/24)$; в) $\pi - \arcsin(24/25)$; $\arccos(-7/25)$; $\pi - \operatorname{arctg}(24/7)$; $\pi - \arccos(7/25)$; $\pi - \operatorname{arcctg}(7/24)$. 15. а) ▲ Так как $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, то $0 \leqslant \arcsin x \leqslant \pi/2$; $0 \leqslant \arcsin y \leqslant \pi/2$ и $0 \leqslant \arcsin x + \arcsin y \leqslant \pi$; поэтому можно написать уравнение $\arcsin x + \arcsin y = \arccos z$, откуда $\cos(\arcsin x + \arcsin y) = \cos(\arccos z)$; $z = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy$; г) ▲ Так как $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi/2$ и $-\pi/2 \leqslant -\arccos y \leqslant 0$, то $-\pi/2 \leqslant \arccos x - \arccos y \leqslant \pi/2$ и можно написать уравнение $\arccos x - \arccos y = \arcsin z$. Отсюда следует, что $\sin(\arccos x - \arccos y) = \sin(\arcsin z)$ или $z = y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}$; з) ▲ Имеем $x > 0$, $y > 0$, поэтому $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi/2$, $0 < \operatorname{arcctg} y < \pi/2$, $0 < \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y < \pi$, и имеем уравнение $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg} z$ или $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} z)$. Используя формулу $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = -(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1)/(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$, получаем $z = (xy-1)/(x+y)$. 16. а) $\arccos(-16/65)$; б) $\arccos(-3/5)$; в) $\operatorname{arcctg}(-19/9)$; г) $-\arcsin(3/5)$; д) $-\arcsin(36/325)$; е) $-\operatorname{arctg}(1/21)$; ж) $-\operatorname{arctg}(1/21)$. 17. а) ▲ Введем обозначение $\arcsin x + \arccos x = \alpha$. Так как $-\pi/2 \leqslant \arcsin x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, то $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant 3\pi/2$; поскольку $\sin\alpha = \sin(\arcsin x + \arccos x) = x\cdot x + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} = 1$, то $\alpha = \pi/2$; б) пусть $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \beta$; так как $-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2$, $0 < \operatorname{arctg} x < \pi$, то $-\pi/2 < \beta < 3\pi/2$. Поскольку $\sin\beta = \sin(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x) = x^2/(1+x^2) + 1/(1+x^2) = 1$, то $\beta = \pi/2$. 18. а) $\{1/2\}$; б) $\{1\}$; в) $\{1\}$. 19. $k = 2$; $\{(\cos(\pi^2/4); 1); (\cos(\pi^2/4); -1)\}$. 20. $\max\limits_{[-1;\,1]} f(x) = f(-1) = 7\pi^3/8$; $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x) = f(1/2) = \pi^3/32$. ▲ Так как $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, то, полагая $\arccos x = t$, исходную функцию приведем к виду $\frac{\pi}{2}\left(3t^2 - \frac{3}{2}\pi t + \frac{\pi^2}{4}\right)$. Функция $f(t)$ прини-

мает наименьшее значение при $t = \frac{\pi}{4}\left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, а наибольшее — при $t = \pi\ (x = -1)$. 21. а) $-3\pi/7$. ▲ Из определения обратной функции $y = \arcsin x$ следует, что $\arcsin(\sin x) = x$, если $x \in [-\pi/2; \pi/2]$. Чтобы применить эту формулу, сделаем преобразование $\sin(10\pi/7) = \sin(\pi + 3\pi/7) = -\sin(3\pi/7) = \sin(-3\pi/7)$. Таким образом, $\arcsin(\sin 10\pi/7) = \arcsin(\sin(-3\pi/7)) = -3\pi/7$ $(-3\pi/7 > -\pi/2)$; б) $11\pi/18$; в) $-\pi/5$.

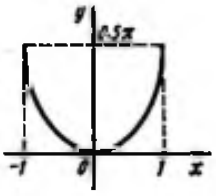
22. а)



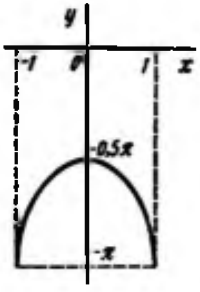
22. б)



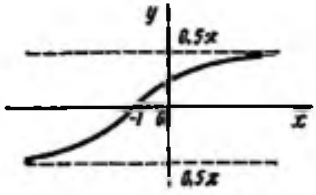
22. в)



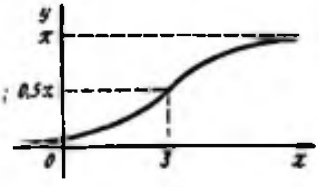
22. г)



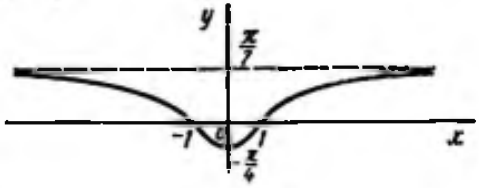
23. а)



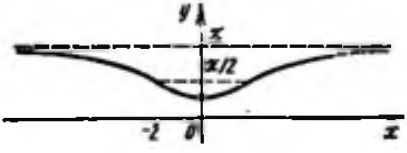
23. б)



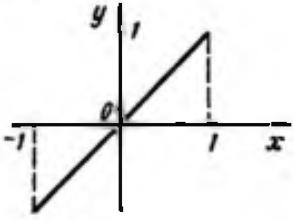
23. в)



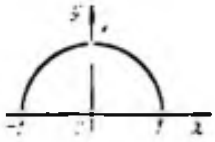
23. г)



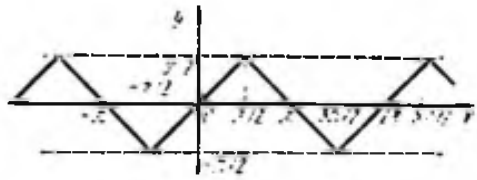
24. а)



24. б)



24. в)



25. ▲ а) Пусть $f(x)=\sin x$. Тогда по формуле производной обратной функции $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$ $(g(x)=\arcsin x)$ находим

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{f'(\arcsin x)}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

б) доказательство проводится аналогично доказательству, проведенному в пункте а); в) пусть $f(x)=\operatorname{tg} x$, $g(x)=\operatorname{arctg} x$, имеем $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{f'(\operatorname{arctg} x)}=\cos^2(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)+1}=\frac{1}{1+x^2}$; г) доказательство проводится аналогично доказательству, проведенному в пункте в). 26. а) $-1/\sqrt{2x-x^2}$; б) $-1/\sqrt{1-(x+2)^2}$; в) $1/\sqrt{4-x^2}-2/\sqrt{1-4x^2}$; г) $\arcsin x+x/\sqrt{1-x^2}$; д) $-\frac{x+(\arccos x)\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$; е) $\frac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$; ж) $2x/(1-x^4)$; з) $-(2^x\ln 2)/(1+4^x)$; и) $\cos x\cos x'$; к) $-1/((1+x)\times\sqrt{2x(1-x)})$. 27. а) 4; б) $3\sqrt{2}$; в) 1,5; г) 0,8. 28. а) $y=15x/4-3/4+\arcsin(3/5)$; б) $y=x/4+1/2-\pi/4$. 29. а) $\{0\}$; б) $\{0\}$. ▲ Данная функция дифференцируема в любой точке $x\in R$, поэтому ее критическими точками могут быть лишь те x_0, в которых $y'(x_0)=0$. Дифференцируя, получаем $y'(x)=\operatorname{arctg} x-x/(1+x^2)$. Уравнение $\operatorname{arctg} x+x/(1+x^2)=0$ имеет единственное решение $x=0$ (функция $\varphi(x)=y'(x)$ — нечетная, принимающая только положительные значения при всех $x>0$). 30. $\max\limits_{[0;\,1]} y=y(0)=\pi/4$; $\min\limits_{[0;\,1]} y=y(1)=0$.

§ 7. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1. а) $\{\pi n+(-1)^{n+1}\pi/6 \mid n\in Z\}$; б) $\{\pi n+\pi/8 \mid n\in Z\}$; в) $\{\pi n/2 \mid n\in Z\}$. ● Исходное уравнение равносильно уравнению $\sin 2x=0$; г) $\{2\pi n+(-1)^n\,2\arcsin(1/4)+2\pi/3 \mid n\in Z\}$. ● Представьте левую часть уравнения в виде $\sin(x/2-\pi/3)$; д) $\left\{\frac{\pi^2}{4}(4n-1)^2 \mid n\in N\right\}$. ▲ Исходное уравнение приводим к уравнению $\sqrt{x}=2\pi n-\pi/2$, которое имеет решения, если $2\pi n-\pi/2\geqslant 0$ или $n\geqslant 1/4$. Но так как $n\in Z$, последнее неравенство будет выполняться лишь при $n\in N$. 2. а) $\{\pi n+\pi/2 \mid n\in Z\}$; б) $\{2\pi n/3+7\pi/18 \mid n\in Z\}$; в) $\{2\pi n\pm 2\pi/3 \mid n\in Z\}$. ● $\sin^2(x/2)-\cos^2(x/2)=-\cos x$; г) $\{2\pi n\pm\arccos(\pi/4)-\pi/6 \mid n\in Z\}$.

● Представьте левую часть уравнения в виде $\cos(x+\pi/6)$; д) $\{\pm\sqrt{2\pi n} \mid n \in Z_0\}$. 3. $\{\pi n+(-1)^{n+1}\pi/4 \mid n \in Z\}$. ● Покажите, что уравнение $\sin x=13+\sqrt{2}/2=12k-1$ имеет решение лишь при $k=-1$, уравнение $\sin x-13+\sqrt{2}/2=12k+1$ не имеет решений при $k \in Z$. 4. $[-1;\ 7/3]$. ● Решите неравенство $|(a-1,5)/(2-0,5a)| \leqslant 1$. 5. а) $\left\{2\pi n \pm \left(\pi-\arccos\frac{2}{3}\right) \,\middle|\, n \in Z\right\}$;

б) $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{a}{2} \,\middle|\, n \in Z\right\}$ при $a \in [-2;\ 2]$. Функция критических точек не имеет, если $a \notin [-2;\ 2]$. 6. а) $\{\pi n+\pi/6 \mid n \in Z\}$; б) $\{2\pi n-3\pi/14 \mid n \in Z\}$;

в) $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 5 \,\middle|\, n \in Z\right\}$. ● $\operatorname{tg} 2x=2\operatorname{tg} x/(1-\operatorname{tg}^2 x)$;

г) $\{\pi n-\pi/12 \mid n \in Z\}$. ● Представьте левую часть уравнения в виде $\operatorname{tg}(\pi/4-x)$. 7. а) $\{\pi n+\pi/4 \mid n \in Z\}$;

б) $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 2-\frac{\pi}{6} \,\middle|\, n \in Z\right\}$; в) $\{2\pi n+3\pi/2+6 \mid n \in Z\}$;

г) $\{\pi n+\operatorname{arcctg}(\sqrt{7}-\sqrt{2}) \mid n \in Z\}$. 8. а) $\{\pi n;\ 2\pi n \pm 3\pi/4 \mid n \in Z\}$;

б) $\{2\pi n \pm \pi/6;\ 2\pi n+\pi/2 \mid n \in Z\}$; в) $\left\{\frac{\pi n}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12} \,\middle|\, n \in Z\right\}$;

г) $\left\{\frac{\pi n}{3};\ \frac{2\pi n}{3} \pm \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \,\middle|\, n \in Z\right\}$;

д) $\{\pi n+\pi/4;\ 2\pi n \pm \pi/3 \mid n \in Z\}$. 9. а) $\{\pi n+(-1)^{n+1}\pi/6 \mid n \in Z\}$;
б) $\{2\pi n \pm \pi/3 \mid n \in Z\}$; в) $\{\pi n+(-1)^n \arcsin(2/3) \mid n \in Z\}$;
г) $\{2\pi n \pm 2\pi/3 \mid n \in Z\}$; д) $\{\pi(5n+2)+\pi/2;\ 5\pi n \mid n \in Z\}$;
е) $\{\pi n;\ 2\pi n+\pi/6 \mid n \in Z\}$. 10. а) $\{\pi n+\pi/4;\ \pi n+\operatorname{arctg} 3 \mid n \in Z\}$;

б) $\{\pi n-\operatorname{arctg}(1/2);\ \pi n+\operatorname{arctg} 2 \mid n \in Z\}$;

в) $\{\pi n+\pi/6;\ \pi n+\pi/3 \mid n \in Z\}$; г) $\{\pi n+3\pi/4;\ \pi n+\operatorname{arcctg} 2 \mid n \in Z\}$.

11. а) $\left\{\pi n+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} \,\middle|\, n \in Z\right\}$; б) $\{\pi n+(-1)^n \pi/4 \mid n \in Z\}$;

в) $\{2\pi n+\operatorname{arctg}(1/2) \mid n \in Z\}$. ▲ Используя формулы для логарифмов произведения и частного, приведем уравнение к виду

$$\log_3 \frac{3\sin x}{\cos x(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg} x)}=1 \quad \text{или} \quad 3\operatorname{tg} x=2(1-\operatorname{tg}^2 x),$$

Решая теперь уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, получаем $(\operatorname{tg} x)_1=-2$ и $(\operatorname{tg} x)_2=1/2$. Так как мы в результате преобразований получили уравнение, не равносильное данному, то необходимо осуществить проверку. Решениями исходного уравнения могут быть лишь те значения x, при которых совместна система неравенств

$$\sin x>0, \quad \cos x>0, \quad 1-\operatorname{tg} x>0, \quad 1+\operatorname{tg} x>0.$$

Решения уравнения $\operatorname{tg} x=-2$ не удовлетворяют неравенству $1+\operatorname{tg} x>0$ системы, поэтому они являются посторонними. Уравнение $\operatorname{tg} x=1/2$ имеет решения $x=\pi k+\operatorname{arctg}(1/2)$, $k \in Z$. Проверяя их подстановкой в неравенства $\sin x>0$ и $\cos x>0$,

устанавливаем, что эти неравенства будут выполняться при $k=2n$, $n \in Z$. 12. а) $\{\pi n/2+\pi/8 \mid n \in Z\}$; б) $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{(-1)^n}{2}\arcsin 2\,(2-\sqrt{3}) \mid n \in Z\right\}$; в) $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\left(1-\sqrt{3+2a}\right) \mid n \in Z\right\}$ при $a \in \left[-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right]$; ∅ при $a \notin [-3/2;\ 1/2]$; г) $\left\{\frac{\pi n}{2}+\right.$ $\left.+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} \mid n \in Z\right\}$; д) $\left\{\frac{\pi n}{5};\ \frac{2\pi n}{5} \pm \frac{1}{5}\arccos\frac{1}{4} \mid n \in Z\right\}$. 13. а) $\left\{\pi n+(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{33}-3}{4} \mid n \in Z\right\}$; б) $\left\{\pi n/5+\right.$ $\left.+(-1)^n \pi/20-\frac{6}{5} \mid n \in Z\right\}$; в) $\{\pi n/2+\pi/4 \mid n \in Z\}$. ● Используйте $2\sin^2 x=1-\cos 2x$; г) $\left\{2\pi n \pm \arccos\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a} \mid n \in Z\right\}$ при $a \neq 0$, $\{\pi n+\pi/2 \mid n \in Z\}$ при $a=0$. 14. в) $\left\{\pi/2+2\pi n \mid n \in -N;\ \frac{3}{2};\ -\pi/2+2\pi m \mid m \in N\right\}$. ▲ Данная функция после простейших преобразований может быть представлена в виде $f(x)=2\cos x-|2x-3|+e^3-2$. Отсюда видно, что она дифференцируема всюду, кроме точки $x=3/2$, т. е. эта точка является критической. Имеем $f(x)=2\cos x+2x+e^3-5$ для $x<3/2$, $f(x)=2\cos x-2x+e^3+1$ для $x>3/2$. Другие критические точки находим, продифференцировав функцию и приравняв производную нулю (с учетом неравенств); б) $\left\{(\pi/2+\right.$ $\left.+2\pi m)/6 \mid m=1,\ 0,\ -1,\ -2,\ \ldots;\ 2;\ \frac{1}{6}(-\pi/2+2\pi n)\ n=\right.$ $\left.=3,\ 4,\ 5,\ \ldots\right\}$; в) $\{\pi(2n+1)/2 \mid n \in Z\}$; г) $\{2\pi n \pm 3\pi/4 \mid n \in Z\}$. ▲ Данная функция дифференцируема в каждой точке промежутка $]-\infty;\ \infty[$. Дифференцируя функцию и приравнивая нулю производную, получаем уравнение $2\cos^2 x+(\sqrt{2}-2\sqrt{5})\cos x-\sqrt{10}=0$. Отсюда получаем $\cos x=\sqrt{5}$ (множество решений этого уравнения пусто) и $\cos x=-2/\sqrt{2} \Rightarrow x=2\pi n \pm 3\pi/4$; $n \in Z$; д) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n \mid n \in Z\right\}$. 15. а) $\{\pi(2n+1) \mid n \in Z\}$. ▲ Учитывая, что $2\cos^2(x/2)=1+\cos x$, приведем уравнение к виду $\cos^3 x+\cos^2 x-2(\cos x+1)=0$ или $(\cos x+1)(\cos^2 x-2)=0$. Таким образом, имеем два уравнения: $1+\cos x=0$, решение которого $-x=2\pi n+\pi$, $n \in Z$, и $\cos^2 x-2=0$, которое решений не имеет; б) $\{\pi+\pi/2;\ 2\pi n \pm \pi/3;\ 2\pi n+(\pi-\arccos(2/3)) \mid n \in Z\}$; в) $\{\pi n-\pi/4;\ \pi n \pm \pi/3 \mid n \in Z\}$. ● Воспользуйтесь тождеством $1/\cos^2 x-1=\operatorname{tg}^2 x$ и приведите уравнение к виду $(\operatorname{tg} x+1) \times$ $\times(\operatorname{tg}^2 x-3)=0$; г) $\{2\pi n;\ 2\pi n \pm 2\pi/3;\ 2\pi n \pm \arccos$ $((-1 \pm \sqrt{5})/4) \mid n \in Z\}$. 16. а) $\{\pi n+\operatorname{arctg} 5 \mid n \in Z\}$. ▲ Обо

части уравнения ни при каком x не обращаются в ноль одновременно; поделив уравнение на $\cos x$, получим уравнение $\sin x/\cos x = \operatorname{tg} x = 5$, равносильное данному. Решения последнего даются формулой $x = \pi n + \operatorname{arctg} 5$, $n \in Z$; б) $\{\pi n + \pi/4 \mid n \in Z\}$; в) $\{\pi n - \pi/4 \mid n \in Z\}$; г) $\{2\pi n - \pi/4;\ 2\pi n + \pi/2 \mid n \in Z\}$; д) $\{\pi n + \pi/2;\ \pi n + \operatorname{arctg}(1/4) \mid n \in Z\}$. 17. а) $\{\pi n + \pi/4;\ 2\pi n \pm 2\pi/3 \mid n \in Z\}$; б) $\{\pi n + \operatorname{arctg} 2 \mid n \in Z\}$; в) $\{2\pi n;\ \pi n + \pi/4 \mid n \in Z\}$; г) $\{\pi n - \pi/4;\ \pi n \mid n \in Z\}$; д) $\{\pi n + \pi/4 \mid n \in Z\}$. ● Преобразуйте правую часть уравнения к виду $(\cos x - \sin x)^2 + \cos^2 x - \sin^2 x$. 18. а) $\{\pi n - \pi/4;\ \pi n - \operatorname{arctg} 2 \mid n \in Z\}$. ▲ Так как $\sin x$ и $\cos x$ при одном и том же значении x не обращаются в ноль, то можно поделить уравнение на $\cos^2 x$. Получим уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0, \qquad (1)$$

равносильное исходному. Из уравнения (1) получаем уравнения $\operatorname{tg} x = -1$ и $\operatorname{tg} x = -2$, решения которых находим по известным формулам; б) $\{\pi n + \pi/4;\ \pi n - \operatorname{arctg}(1/4) \mid n \in Z\}$; в) $\{\pi n + \pi/4;\ \pi n + \operatorname{arctg}(3/5) \mid n \in Z\}$; г) $\{\pi n + \operatorname{arctg} 2;\ \pi n - \operatorname{arctg}(3/4) \mid n \in Z\}$. ● Представьте правую часть уравнения в виде $-2(\sin^2 x + \cos^2 x)$; д) $\{\pi n - \pi/4;\ \pi n + \operatorname{arctg} 5 \mid n \in Z\}$. 19. а) $\{\pi n - \operatorname{arctg} \sqrt[3]{4} \mid n \in Z\}$; б) $\{\pi n - \pi/4;\ \pi n \pm \pi/3 \mid n \in Z\}$. ▲ Преобразуем правую часть уравнения: $3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3 = 3 \sin x \cdot \cos x - 3 \sin^2 x + 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3 \cos x (\sin x + \cos x)$. Теперь имеем уравнение $\sin^2 x (1 + \operatorname{tg} x) = 3 \cos^2 x (1 + \operatorname{tg} x)$, или $(1 + \operatorname{tg} x)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$, решение которого сводится к решению уравнений $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; в) $\{\pi n/2 \mid n \in Z\}$. ● Представьте правую часть уравнения в виде $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$; г) $\{\pi n/2 \mid n \in Z\}$ при $a = 0$; $\left\{\pi n + \operatorname{arctg} \frac{1}{2a};\ \pi n + \operatorname{arctg} \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16a^2}}{4a} \,\middle|\, n \in Z\right\}$ при $a \neq 0$. 20. а) $\left\{\frac{\pi n}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5}{3} \,\middle|\, n \in Z\right\}$; б) $\{\pi n + \operatorname{arctg}(6 \pm \sqrt{3}) \mid n \in Z\}$; в) $\{\pi n + (-1)^{n+1} \pi/6 \mid n \in Z\}$; г) $\{\pi n - \operatorname{arctg}(1/2) \mid n \in Z\}$; д) $\{\pi n \pm \pi/6 \mid n \in Z\}$. 21. а) $\{2\pi n;\ 2\pi n + \pi/3 \mid n \in Z\}$; б) $\left\{2\pi n + \frac{\pi}{12},\ 2\pi n + \frac{7\pi}{12} \,\middle|\, n \in Z\right\}$; в) $\left\{\frac{2\pi n}{5} - \frac{\pi}{5};\ \frac{2\pi n}{5} + \frac{2\pi}{15} \,\middle|\, n \in Z\right\}$; г) $\{2\pi n;\ 2\pi n + \pi/2 \mid n \in Z\}$; д) $\{2\pi n + 5\pi/3 \mid n \in Z\}$; е) $\left\{\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{12}(2n+1);\ \frac{\pi}{8}(1 - 2n) \mid n \in N\right\}$; ж) $\left\{2\pi n \pm \arccos \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \,\middle|\, n \in Z\right\}$ при $a \in [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$; $\varnothing$ при $a \notin [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$; з) $\left\{\pi n + \frac{7\pi}{12} \,\middle|\, n \in Z\right\}$; и) $\{\pi n/4 \mid n \in Z$, кроме $n = 4k + 2,\ k \in Z\}$.
22. а) $\left\{\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{12} \,\middle|\, n \in Z$, кроме $n = 1 + 3m,\ m \in Z\right\}$; б) $\varnothing$; в) $\{\pi n \mid n \in Z\}$. ▲ Исходное уравнение равносильно уравнению

$$2(\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x) = \operatorname{tg} 2x (1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x). \qquad (1)$$

Найдем теперь значения x, при которых $1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}2x=0$. Последнее уравнение эквивалентно уравнению $\cos x/(\cos 2x\cos 3x)=0$. Оказывается, что это уравнение решений не имеет, так как если $\cos x=0$, то и $\cos 3x=0$. Следовательно, уравнение (1) можно разделить на $1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}2x\neq 0$; имеем:

$$2\frac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x}{1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}2x}=\operatorname{tg}2x, \text{ или } 2\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}, \text{ или } \operatorname{tg}x=0.$$

Решая уравнение $\operatorname{tg}x=0$, получаем $x=\pi n$, $n\in Z$, и после проверки выполнения условий $x\neq\pi k/2+\pi/4$ и $x\neq\pi k/3+\pi/6$, $k\in Z$, устанавливаем, что $x=\pi n$, $n\in Z$, — решение исходного уравнения; г) $\{90°n+25°\mid n\in Z\}$. 23. а) $\{2\pi n\mid n\in Z\}$. ● Используйте тождество $\sin x=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big/\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)$; б) $\{2\pi n-\pi/2\mid n\in Z\}$. ● Используйте тождество $\cos x=\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\Big/\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)$; в) $\{\pi n\pm\pi/6;\ \pi/2+\pi n\ \ n\in Z\}$; г) $\{2\pi n\pm 2\operatorname{arctg}5\mid n\in Z\}$; д) $\{2\pi n\pm 2\operatorname{arctg}3;\ 2\pi n\pm 2\operatorname{arctg}\sqrt{3/11}\mid n\in Z\}$; е) $\{\pi n\pm\pi/4\mid n\in Z\}$. 24. Нет. ▲ Множества решений первого уравнения $\{\pi n-\pi/4;\ \pi n+\pi/2\ \ n\in Z\}$ и второго — $\{\pi n-\pi/4\ \ n\in Z\}$ не совпадают, поэтому уравнения неравносильны. *Замечание.* Тождества $\sin\alpha=2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\Big/\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$ и $\cos\alpha=\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\Big/\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$ имеют место, когда $\cos\alpha\neq -1$. 25. а) $\{\pi n+\pi/2;\ \pi n\pm\pi/3\ \ n\in Z\}$. ▲ Так как $\cos 3x=4\cos^3x-3\cos x$, то исходное уравнение равносильно уравнению $\cos x\times(4\cos^2x-1)=0$, или $\cos x(\cos 2x+1/2)=0$, решая которое получаем ответ; б) $\{\pi n/3+\pi/6;\ 2\pi n/3\pm 2\pi/9\ \ n\in Z\}$. ● Приведите уравнение к виду $\cos 3(3x)-4\cos^2 3x=0$ и положите $\cos 3x=t$; в) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi n}{2}\pm\frac{\pi}{12}\,\middle|\, n\in Z\right\}$. ● Приведите уравнение к виду $2\cos 2(2x)=1+\cos 3(2x)$ и положите $\cos 2x=t$. 26. а) $\{3\pi n\mid n\in Z\}$. ● Используйте тождество $\sin x=3\sin\frac{x}{3}-4\sin^3\frac{x}{3}$; б) $\left\{\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi n}{2}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}\,\middle|\, n\in Z\right\}$; в) $\{2\pi n;\ 4\pi n\pm 2\pi/3\mid n\in Z\}$; г) $\{\pi n+(-1)^n\pi/6;\ 2\pi n+\pi/2\mid n\in Z\}$. ● Используйте тождества $\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ и $\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{3}{2}x\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}x\right)=\sin 3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ и положите $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=y$. 27. $\{\pi n-\pi/4\ \ n\in Z\}$. 28. а) $\{2\pi n\mid n\in Z\}$ при $a\in\,]-\infty;\ -5/4[\cup]5;\ \infty[$, $\left\{2\pi n;\ 4\pi n\pm 2\arccos\frac{-1\pm\sqrt{4a+5}}{4}\,\middle|\, n\in Z\right\}$ при $a\in[-5/4;\ 1]$, $\left\{2\pi n;\ 4\pi n\pm 2\arccos\frac{\sqrt{4a+5}-1}{4}\,\middle|\, n\in Z\right\}$ при $a\in\,]1;\ 5]$. ▲ Разлагая $\sin\frac{3x}{2}$ по формуле для синуса тройного угла, получаем урав-

нение $\sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}+3-4\sin^2\frac{x}{2}-a\right)=0$, или

$$\sin\frac{x}{2}\left(4\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}-1-a\right)=0. \qquad (1)$$

Таким образом, имеем совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{x}{2}=0,\\ 4\cos^2\dfrac{x}{2}+2\cos\dfrac{x}{2}-1-a=0.\end{array}\right.$$

Уравнение $\sin(x/2)=0$ имеет решение $x=2\pi n$, $n\in Z$, при любом $a\in R$. Полагая $\cos(x/2)=t$, получаем квадратное уравнение относительно t:

$$4t^2+2t-1-a=0, \qquad (2)$$

причем уравнение (2) может иметь решения лишь при тех значениях $a\in R$, при которых $t\in[-1;\ 1]$. Находим корни уравнения (2): $t_1=(-1-\sqrt{4a+5})/4$; $t_2=(-1+\sqrt{4a+5})/4$. Решая далее неравенства $-1\leqslant t_1<0$ и $-1\leqslant t_2\leqslant 1$, устанавливаем, что корень t_1 уравнения (2) существует, если $a\in[-5/4;\ 1]$, а t_2 — если $a\in[-5/4;\ 5]$. Следовательно, уравнение $\cos(x/2)=t_1$ имеет решения $x=4\pi n\pm 2\arccos\dfrac{-1-\sqrt{4a+5}}{4}$, $n\in Z$, при $a\in[-5/4;\ 1]$, а уравнение $\cos\dfrac{x}{2}=t_2$ — решения $x=4\pi n\pm 2\arccos\dfrac{\sqrt{4a+5}-1}{4}$, $n\in Z$, при $a\in\left[-\dfrac{5}{4};\ 5\right]$. Учитывая, что на отрезке $[-5/4;\ 1]$ уравнение (2) имеет два решения, получаем ответ: б) $\{\pi n\ n\in Z\}$ при $a\in]0;\ 1/3[$, $\left\{\pi n;\ \pi n\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1-a}{2a}\ \middle|\ n\in Z\right\}$ при $a\in[1/3;\ 1[$, $\left\{\pi n;\ \pi n\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1-a}{2a};\ \pi n\pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1+a}{2a}\right)\ \middle|\ n\in Z\right\}$ при $a\in[1;\ \infty[$. 29. $\left\{2\pi n\pm\arccos\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}\ \middle|\ n\in Z\right\}$ при $c^2\leqslant a^2+b^2$, ∅ при $c^2>a^2+b^2$. ▲ Так как $a^2+b^2\neq 0$, то можно делить уравнение на $\sqrt{a^2+b^2}$. Получим уравнение

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad (1)$$

равносильное исходному. Числа $a/\sqrt{a^2+b^2}$ и $b/\sqrt{a^2+b^2}$ по абсолютной величине не превосходят единицы и удовлетворяют тождеству $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$. Поэтому можно положить

$$a/\sqrt{a^2+b^2}=\cos\varphi \quad\text{и}\quad b/\sqrt{a^2+b^2}=\sin\varphi$$

теперь уравнение (1) примет вид

$$\cos x\cos\varphi+\sin x\sin\varphi=\cos(x-\varphi)=c/\sqrt{a^2+b^2}. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет решение, если

$$|c/\sqrt{a^2+b^2}| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad c^2 \leqslant a^2+b^2,$$

тогда получаем

$$x-\varphi = 2\pi k \pm \arccos\left(c/\sqrt{a^2+b^2}\right), \quad k \in Z. \qquad (3)$$

Значение вспомогательного аргумента найдем из системы уравнений

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$\varphi = 2\pi m + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$, $m \in Z$. (Здесь мы предполагаем, что $a > 0$; случай $a = 0$ приводит исходное уравнение к простейшему уравнению $b\sin x = c$; если же $a < 0$, то коэффициент перед $\cos x$ можно сделать положительным, умножив уравнение на -1.) Подставляя полученное значение φ в уравнение (3), находим

$$x = 2\pi(m+k) \pm \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

или

$$x = 2\pi n \pm \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \quad n \in Z,$$

так как $(m+k) \in Z$. *Замечание.* Если принять $a/\sqrt{a^2+b^2} = \sin\psi$, $b/\sqrt{a^2+b^2} = \cos\psi$, то уравнение (2) примет вид $\sin(x+\psi) = c/\sqrt{a^2+b^2}$. 30. $[\sqrt{5}-1;\ 2]$.

31. а) $\left\{2\pi n \pm \arccos\dfrac{2}{\sqrt{13}} + \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} \;\middle|\; n \in Z\right\}$,

б) $\left\{2\pi n \pm \arccos\dfrac{a^2}{\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{4} \;\middle|\; n \in Z\right\}$ при $a \in [-\sqrt[4]{2};\ \sqrt[4]{2}]$. ∅ при $a \in]-\infty;\ -\sqrt[4]{2}[\cup]\sqrt[4]{2};\ \infty[$;

в) $\left\{\pi n \pm \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a}{\sqrt{10}} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} \;\middle|\; n \in Z\right\}$ при $a \in [-\sqrt{10};\ \sqrt{10}]$, ∅ при $a \in]-\infty;\ -\sqrt{10}[\cup]\sqrt{10};\ \infty[$. ▲ Поделив данное уравнение на $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ и положив $3/\sqrt{10} = \cos\varphi$; $1/\sqrt{10} = \sin\varphi$, получим $\cos 2x\cos\varphi + \sin 2x\sin\varphi = \cos(2x-\varphi) = a/\sqrt{10}$, где $\varphi = \operatorname{arctg}(1/3)$. Уравнение $\cos(2x-\varphi) = a/\sqrt{10}$ имеет решение, если $|a/\sqrt{10}| \leqslant 1$ или $-\sqrt{10} \leqslant a \leqslant \sqrt{10}$. Таким образом, $2x - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} = \pm 2\pi n \pm \arccos\dfrac{a}{\sqrt{10}}$, $n \in Z$, при $|a| \leqslant \sqrt{10}$. Отсюда находим ответ; г) $\left\{\dfrac{\pi n}{6} \pm \dfrac{1}{12}\arccos\dfrac{2a+17}{\sqrt{137}} + \dfrac{1}{12}\operatorname{arctg}\dfrac{4}{11} \;\middle|\; n \in Z\right\}$ при $a \in \left[\dfrac{-\sqrt{137}-17}{2};\ \dfrac{\sqrt{137}-17}{2}\right]$,

○ при $a \in \left]-\infty;\ \dfrac{-\sqrt{137}-17}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\sqrt{137}-17}{2};\ \infty\right[$. ● Исполь-

зуйте формулы $\sin^2 6x = \frac{1-\cos 12x}{2}$, $\cos^2 6x = \frac{1+\cos 12x}{2}$, $\sin 6x \cos 6x = \frac{1}{2}\sin 12x$.

32. $\left\{\frac{2\pi n}{3} \pm \frac{1}{3}\arccos\frac{a}{5} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{4}{3} \,\middle|\, n \in Z\right\}$ при $a \in [-5; 5]$; при $a \notin [-5; 5]$ функция критических точек не имеет.

33. а) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{8} \,\middle|\, n \in Z\right\}$; б) $\left\{\pi n; \frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{6} \,\middle|\, n \in Z\right\}$;

в) $\left\{\frac{4\pi n}{5} + \frac{2\pi}{5}; \frac{4\pi n}{3} + \frac{2}{3}\pi \,\middle|\, n \in Z\right\}$; г) $\left\{\frac{\pi n}{4} \,\middle|\, n \in Z\right\}$;

д) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8}; \pi n + \frac{3\pi}{4} \,\middle|\, n \in Z\right\}$. ● Приведите уравнение к виду $\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$; е) $\{n; (-1 \pm \sqrt{4l+3})/2 \,|\, n \in Z,\ l \in Z_0\}$.

34. а) $\{\pi n + \pi/4 \,|\, n \in Z\}$; б) $\{\pi n/4 \,|\, n \in Z\}$;

в) $\left\{\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{12}; 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3} \,\middle|\, n \in Z\right\}$; г) $\{\pi n;\ 2\pi n \pm \pi/6 \,|\, n \in Z\}$;

д) $\{\pi n - \pi/4;\ \pi n + \pi/2 \,|\, n \in Z\}$;

е) $\left\{\frac{2\pi n}{3};\ \pi n + \pi/4;\ 2\pi n - \pi/2 \,\middle|\, n \in Z\right\}$; ж) $\{\pi n/2 \,|\, n \in Z\}$;

з) $\{\pi n + \pi/2 \,|\, n \in Z\}$. 35. а) $\left\{\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{48}; \frac{\pi n}{4} + \frac{3\pi}{32} \,\middle|\, n \in Z\right\}$. ● Преобразуйте уравнение к виду $\sin 10x = \sin(\pi/4 - 2x)$; б) $\{x_0 \,|\, x_0 \in R$, кроме $x_0 = \pi n,\ n \in Z\}$; в) $\{\pi n/5;\ \pi n \pm 3\pi/8 \,|\, n \in Z\}$. ● Преобразуйте уравнение к виду $\frac{\sin 2x \cos 3x + \sin 3x \cos 2x}{\cos 2x} + \sqrt{2}\sin 5x = 0$;

г) $\left\{4\pi n + \frac{17}{6}\pi;\ \frac{8\pi n}{3} - \frac{5\pi}{18};\ \frac{8\pi n}{3} + \frac{\pi}{6} \,\middle|\, n \in Z\right\}$. ● Преобразуйте правую часть уравнения к виду $2\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{5\pi}{24}\right)$. 36. а) $\{2\pi n/5;\ \pi n + \pi/2;\ 2\pi n + \pi \,|\, n \in Z\}$. ● Преобразуйте уравнение к виду $(\sin x + \sin 4x) + (\sin 2x + \sin 3x) = 2\sin\frac{5}{2}x\left(\cos\frac{3}{2}x + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$;

б) $\left\{\frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{6} \,\middle|\, n \in Z\right\}$;

в) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{24} \,\middle|\, n \in Z\right\}$;

г) $\left\{\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{8};\ \frac{\pi n}{3} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} \,\middle|\, n \in Z\right\}$;

д) $\left\{\frac{\pi n}{5} + (-1)^n\frac{\pi}{30};\ \frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{16};\ \pi n + \frac{3\pi}{4} \,\middle|\, n \in Z\right\}$;

е) $\{\pi n + \pi/2;\ \pi n + (-1)^n\pi/6;\ 2\pi n \pm 2\pi/3 \,|\, n \in Z\}$;

ж) $\{\pi n/2;\ 2\pi n \pm 2\pi/3 \,|\, n \in Z\}$;

з) $\left\{\frac{\pi}{7}(2n+1) \,\middle|\, n \in Z$, кроме $n = 7l - 4,\ l \in Z\right\}$. ▲ Преобразуем

уравнение:

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}=\frac{2\sin 3x\cos x}{2\sin x\cos x\sin 4x},$$

$$\sin 4x-\sin 3x=0;\quad 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{7}{2}x=0.$$

Из решений последнего уравнения нужно отобрать те, при которых $\sin x\neq 0$, $\sin 2x\neq 0$, $\sin 4x\neq 0$. Имеем: $\sin(x/2)=0$, $x=2\pi k$, $k\in Z$, — постороннее решение, знаменатели всех дробей исходного уравнения обращаются в ноль;

$$\cos(7x/2)=0,\quad x=\pi(2n+1)/7.$$

Исключим значения n из этого решения, при которых $x=\pi m/4$ (этого достаточно, так как все решения уравнений $\sin x=0$, $\sin 2x=0$ являются решениями уравнения $\sin 4x=0$). Имеем уравнение $\pi(2n+1)/7=\pi m/4$ или $7m=8n+4$; $m=n+(n+4)/7$. Таким образом, если $(n+4)/7=l$, $l\in Z$, то существуют целые m, при которых уравнение теряет смысл. Окончательно имеем $x=\pi(2n+1)/7$, $n\in Z$, кроме $n=7l-4$, $l\in Z$; и) $]-\infty;\infty[$ при $a\in\{k\pi\ \ k\in Z\}$, $\left\{2\pi n\pm\arccos\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$ при $a\in]-\infty;\infty[$. 37. $\{\pi n/4+\pi/8;\ \pi n\pm\pi/3\ \ n\in Z\}$. 38. а) $\{\pi n\mid n\in Z\}$; б) $\left\{\frac{\pi n}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

▲ $$\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right)+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{\sin 2x}{\cos x\cos 3x}=$$

$$=\frac{\sin 2x(\cos x\cos 3x-\cos 2x)}{\cos x\cos 2x\cos 3x}=-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x=0.$$

Решая уравнение, найдем $x_1=\pi n$, $n\in Z$; $x_2=\frac{\pi m}{2}$, $m\in Z$, и $x_3=\pi l/3$, $l\in Z$. Уравнение $x=\pi l/3$ является следствием уравнения $x=\pi n$ и уравнения $x=\pi m/2$ (при $m=2p$, $p\in Z$). Нечетные значения m дают посторонние решения. Таким образом $x=\pi n/3$, $n\in Z$. 39. а) $\left\{\frac{\pi n}{10}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. ▲ Исходное уравнение равносильно уравнению $(\cos 3x+\cos 9x)/2=(\cos 3x+\cos 11x)/2$ или $\cos 9x-\cos 11x=0$. Преобразуя разность косинусов двух углов в произведение, получаем уравнение $2\sin x\sin 10x=0$, из которого находим решения $x=\pi k$, $x=\frac{\pi n}{10}$, k, $n\in Z$. Учитывая, что решения первого уравнения являются решениями второго (при $k=10n$), получаем ответ; б) $\left\{\frac{\pi n}{3}+\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi n}{5}+\frac{\pi}{10}\,\middle|\,n\in Z\right\}$; в) $\{\pi n;\ \pi n/5+\pi/10,\ n\in Z\}$; г) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi n}{3}+\frac{\pi}{6}\,\middle|\,n\in Z\right\}$; д) $\left\{n-\frac{5}{12};\ n+\frac{1}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 40. а) $\left\{\frac{\pi n}{2};\ \pi n\pm\frac{\pi}{6}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. ▲ Умножая данное уравнение на 2 и применяя тождество $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$,

приведем уравнение к виду $2\sin^2 2x-(\cos 2x-\cos 6x)=0$. Преобразуя далее разность косинусов в произведение синусов, получаем: $2\sin^2 2x-2\sin 2x\sin 4x=0$, $\sin^2 2x(1-2\cos 2x)=0$. Из последнего уравнения находим x: $x=\pi n/2$ и $x=\pi n\pm\pi/6$, $n\in Z$; б) $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi n}{5}+\frac{\pi}{10}\,\middle|\,n\in Z\right\}$; в) $\left\{\pi n+\frac{\pi}{2};\ \frac{2\pi n}{11}+\frac{\pi}{11};\ \frac{2\pi n}{5}\,\middle|\,n\in Z\right\}$; г) $\left\{\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 41. а) $\left\{\frac{2\pi n}{7}+\frac{\pi}{7}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. ● Приведите уравнение к виду

$$2\sin\frac{x}{2}\sin x+2\sin\frac{x}{2}\sin 2x+2\sin\frac{x}{2}\sin 3x=\cos\frac{x}{2}$$

и преобразуйте левую часть, используя формулу $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$; б) $\{2\pi n/7\mid n\in Z$, кроме $n=7k,\ k\in Z\}$. ● Умножьте уравнение на $2\sin\frac{x}{2}$. 42. а) $\left\{\frac{\pi n}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. ▲ Исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x\cos 3x\times(1-\cos 2x)+\cos x\sin 3x(1+\cos 2x)=-3/4$, или $(\sin x\cos 3x+\cos x\sin 3x)+\cos 2x(\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x)=-3/4$ или $\sin 4x+(\sin 4x)/2=-3/4$. Теперь получаем уравнение $\sin 4x=-1/2$, решая которое находим ответ; б) $\{\pi n\pm\pi/8\mid n\in Z\}$. 43. а) $\left\{\frac{\pi n}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{18}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. ▲ Разложим левую часть уравнения в сумму тригонометрических функций:

$$\frac{1}{2}\sin x\left(2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right)=\frac{1}{2}\sin x\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{3}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}(2\sin x\cos 2x+\sin x)=\frac{1}{4}(\sin 3x-\sin x+\sin x)=\frac{\sin 3x}{4}.$$

Решая теперь уравнение $\sin 3x=\frac{1}{8}\cdot 4=\frac{1}{2}$, получаем ответ; б) $(2\pi n/3\pm 2\pi/9\mid n\in Z\}$; в) $\{\pi n/3-\pi/9\mid n\in Z\}$. 44. а) $\{\pi n;\ \pi n\pm\pi/6\mid n\in Z\}$; б) $\{\pi n;\ \pi n\pm\pi/6\mid n\in Z\}$; в) $\left\{\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\,\middle|\,n\in Z\right\}$. ● Преобразуйте данное уравнение к виду $\frac{\sin x\cos 3x-\cos x\sin 3x}{\cos x\sin 3x}=3$; г) $\left\{\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right);\ \pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$; д) $\{\pi n+\pi/2\ \ n\in Z\}$. 45. а) $\{\pi n+\pi/8\ \ n\in Z\}$; б) $\{\pi n\pm\pi/6\mid n\in Z\}$; в) $\{\pi n/2+\pi/4;\ \pi n+\pi/2\mid n\in Z\}$. ● $8\sin^6 x=(1-\cos 2x)^3$; г) $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4};\ \pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. ● Примените формулы $\operatorname{tg}^2 x=(1-\cos 2x)/(1+\cos 2x)$, $\cos 4x=2\cos^2 2x-1$; д) $\left\{\pi n+\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi n}{2}+\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\middle|\,\right\}$. 46. а) $\left\{\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\left(3-2\sqrt{3-a^2}\right)\,\middle|\,\right\}$, $a\in[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$, $\varnothing$ при $a\notin$

$\notin [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$; б) $\left\{ \frac{\pi n}{2} \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{7}{16a-1} \,\middle|\, n \in Z \right\}$ при $a \in \left]-\infty, -\frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{2};\ \infty\right[$, $\varnothing$ при $a \in]-3/8;\ 1/2[$; в) $\{\pi n/2 + \pi/4 \mid n \in Z\}$ при $a \in]-\infty;\ 6] \cup]8;\ +\infty[$; $\left\{ \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi n}{2} \pm \frac{1}{4} \arccos (a-7) \,\middle|\, n \in Z \right\}$ при $a \in]6;\ 8]$. 47. а) $\{\pi(4n+1)/2;\ \pi(2n+1) \mid n \in Z\}$. ▲ Полагая $\sin x - \cos x = y$, найдем $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x = y^2$ или $\sin 2x = 1 - y^2$. Исходное уравнение примет вид $y^2 + 12y - 13 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$; $y_2 = -13$. Таким образом, получим два уравнения: $\sin x - \cos x = y_1 = 1$, решения которого равны $x_1 = \pi(2n+1)$; $x_2 = \pi(4n+1)/2$, $n \in Z$, и $\sin x - \cos x = y_2 = -13$, которое не имеет решений; б) $\left\{ \pi n - \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} \,\middle|\, n \in Z \right\}$. ● Приведите уравнение к виду $1/\sin x + 1/\cos x = -2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$ и положите $\sin x + \cos x = y$; в) $\left\{ 2\pi n + \frac{\pi}{4};\ 2\pi n + \frac{11}{12}\pi;\ 2\pi n - \frac{5}{12}\pi \,\middle|\, n \in Z \right\}$; г) $\{2\pi n;\ 2\pi n + \pi/2 \mid n \in Z\}$; д) $\left\{ 2\pi n - \frac{\pi}{2};\ \pi n - \frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \,\middle|\, n \in Z \right\}$. ● Приведите данное уравнение к виду $\sin x \times (1 + \sin x) + \cos x (1 - \sin^2 x) = (1 + \sin x)(\sin x + \cos x - \sin x \cdot \cos x) = 0$; е) $\{(4\pi n + \pi/2)^2;\ (4\pi n + 11\pi/6)^2 \ n \in Z_0;\ (4\pi m - 5\pi/6)^2 \ m \in N\}$. 48. а) $\{2\pi n \ n \in Z\}$ при $a \in \{-1\} \cup]-2(\sqrt{2}-1);\ 2(\sqrt{2}+1)[$, $\left\{ 2\pi n;\ 2\pi n \pm \left(\pi - \arccos \frac{a+2}{a\sqrt{2}} \right) + \frac{\pi}{4} \,\middle|\, n \in Z \right\}$ при $a \in]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ -2(\sqrt{2}-1)] \cup [2(\sqrt{2}+1);\ \infty[$; б) $\{2\pi n - \pi/4 \mid n \in Z\}$ при $b \in]-\infty;\ 0[\cup]1;\ \infty[$, $\{2\pi n - \pi/4;\ 2\pi n \pm \arccos(2b-1) - \pi/4 \mid n \in Z\}$ при $b \in [0;\ 1]$; в) $\{\pi n - \pi/4 \ \ n \in Z\}$ при $a \in]-\infty;\ -3/\sqrt{2}[\cup]-1/\sqrt{2};\ \infty[$, $\left\{ \pi n - \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi n}{2} + \frac{(-1)^n}{2} \arcsin(a\sqrt{2}+2) \,\middle|\, n \in Z \right\}$ при $a \in \left[-\frac{3}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. 49. $\{2\pi n;\ 2\pi n + \pi/2 \ \ n \in Z\}$.

50. а) $\{2\pi n + 5\pi/6 \mid n \in Z\}$. ▲ Решаем исходное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$ ($\sin x$ принимаем за параметр)

$$\operatorname{tg} x = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{-2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2} \right) \Big/ 2. \qquad (1)$$

Полученное уравнение будет иметь решения, если $\sin x = 1/2$; тогда $\operatorname{tg} x = -1/\sqrt{3}$ и мы приходим к системе уравнений

$$\sin x = 1/2, \quad \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из первого уравнения системы имеем $x_1 = 2\pi n + \pi/6$ и $x_2 = 2\pi n + 5\pi/6$, $n \in Z$. Второму уравнению системы удовлетворяют лишь значения x_2; б) $\{2\pi n;\ 2\pi n + \pi/2 \mid n \in Z\}$; в) $\{2\pi n - \pi/4 \mid n \in Z\}$. ● Преобразуйте уравнение к виду $\cos^2 2x + \sin^2(x/2 + \pi/8) = 0$ и решите затем систему уравнений

$$\cos 2x = 0, \quad \sin(x/2 + \pi/8) = 0.$$

51. а) $\{2\pi(1 + 4n) \mid n \in Z\}$. ▲ После несложных преобразований уравнение приводится к виду

$$\sin \frac{5x}{4} + \cos x = 2. \qquad (1)$$

Так как $\sin(5x/4) \leqslant 1$, $\cos x \leqslant 1$, то, чтобы имело место равенство (1), необходимо одновременное выполнение равенств $\cos x = 1$ и $\sin(5x/4) = 1$. Таким образом, имеем систему уравнений

$$x = 2\pi k, \quad 5x/4 = \pi/2 + 2\pi l,$$

где k, l — некоторые целые числа. Исключая x из этой системы, придем к уравнению $4l = 5k - 1$, или $l = k + \frac{k-1}{4}$. Последнее уравнение имеет решение в целых числах, если $(k-1)/4 = n$, $n \in Z$. Окончательно получаем: $k = 4n + 1$, $n \in Z$, и $x = 2\pi(4n + 1)$; б) $\{\pi n/3;\ 2\pi n - \pi/2 \mid n \in Z\}$.

52. а) $\left\{\pi n - \operatorname{arctg}\frac{1}{6};\ \pi n - \operatorname{arctg}\frac{1}{3} \,\middle|\, n \in Z\right\}$. ● $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = |\operatorname{tg} x|$; б) $\bigcup\limits_{n \in Z} \left[2\pi n - \frac{\pi}{3};\ 2\pi n + \frac{2\pi}{3}\right]$.

● $\sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x} = 2|\cos(x - \pi/6)|$.

53. а) $\{\pi n \pm \pi/6 \mid n \in Z\}$. ▲ Решениями данного уравнения могут быть лишь те значения x, при которых $\cos 2x > -1/4$. Возводя уравнение в квадрат и производя преобразования, получаем уравнение $8\cos^2 2x + 10\cos 2x - 7 = 0$, из которого имеем: $\cos 2x = -7/4$ и $\cos 2x = 1/2$. Уравнение $\cos 2x = -7/4$ решений не имеет, а решение второго уравнения является решением исходного ($\cos 2x = 1/2 > -1/4$); б) $\{2\pi n + \operatorname{arctg} a \mid n \in Z\}$ при $a \in [0; \infty[$, $\{\pi(2n + 1) + \operatorname{arctg} a \mid n \in Z\}$ при $a \in]-\infty; 0[$, $\{\pi n \mid n \in Z\}$ при $a = 0$. 54. а) $\left\{2\pi n + \frac{3}{4}\pi \mid n \in Z\right\}$. ▲ Исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin x = \sqrt{2}\cos^2 x, \\ \cos x \leqslant 0. \end{cases}$ Решая уравнение системы $\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$, придем к уравнению $\sin x = 1/\sqrt{2}$. Решениями последнего являются $x = 2\pi n + \pi/4$ (посторонние, так как не выполняется неравенство системы) и $x = 2\pi n + 3\pi/4$, $n \in Z$, удовлетворяющее всем условиям системы;

б) $\left\{2\pi n - \arccos\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \mid n \in Z\right\}$; в) $\{2\pi n + \pi/8;\ 2\pi n - 3\pi/8 \mid n \in Z\}$;

г) $\{\pi n/2;\ \pi n + \pi/6 \mid n \in Z\}$; д) $\{2\pi n + \pi/2;\ 2\pi n - \pi/6 \mid n \in Z\}$;

е) $]-\infty; \infty[$ при $a = 0$; $\{\pi n \mid n \in Z\}$ при $a \in]-\infty; \infty[$.

55. а) $\{2\pi n;\ 2\pi n - \pi/2 \mid n \in Z\}$;

б) $\{2\pi n + 3\pi/8;\ 2\pi n + 7\pi/8;\ 2\pi n + \pi;\ \pi n + \pi/4 \mid n \in Z\}$. ● Приведите уравнение к виду $(\sin 2x + \cos 2x)(1 - \cos 2x - \sin 2x) = 0$

и учтите условие $\sin x - \cos x \geqslant 0$; в) $\{2\pi n;\ \pi n - \pi/4 \mid n \in Z\}$;
г) $\left\{\frac{\pi n}{3} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} \,\middle|\, n \in Z\right\}$; д) $\left\{\pi n + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} \,\middle|\, n \in Z\right\}$;
е) $\left\{2\pi n + \frac{\pi}{12};\ 2\pi n - \frac{7\pi}{12} \,\middle|\, n \in Z\right\}$.

56. а) $\left\{2\pi n + \frac{\pi}{6};\ \frac{2}{3}\pi l + \frac{5}{18}\pi \,\middle|\, n,\ l \in Z,\ \text{кроме } l = 3m+2,\ m \in Z\right\}$;
б) $\left\{4\pi n + \frac{13}{6}\pi \mid n \in Z\right\}$.

57. $\left\{2\pi n \pm \arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(a - \frac{5}{6a}\right)^2\right) \,\middle|\, n \in Z\right\}$
при $a \in \left[\sqrt{\frac{5}{6}};\ \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right]$,
при $a \notin [1;\ 5/6;\ (2\sqrt{2}+\sqrt{3})/\sqrt{6}]$.

58. а) $\{2\pi n \pm \arccos(1/3)\ \ n \in Z\}$. ▲ Преобразовав правую часть уравнения

$$(\log_5 4)\log_4(3\sin x) = \frac{\log_4(3\sin x)}{\log_4 5} = \log_5(3\sin x),$$

получим уравнение $\log_5 \operatorname{tg} x = \log_5 3\sin x$, эквивалентное системе $\begin{cases}\operatorname{tg} x = 3\sin x,\\ \sin x > 0.\end{cases}$ Решая уравнение системы, получаем $\cos x = 1/3$ $(\sin x \neq 0)$, откуда $x_1 = 2\pi n + \arccos(1/3)$ и $x_2 = 2\pi n - \arccos(1/3)$, $n \in Z$. Второе решение (x_2) не удовлетворяет неравенству системы и является посторонним; б) $\left\{2\pi n + \arccos\frac{1}{10} \,\middle|\, n \in Z\right\}$. 59. а) $\{\pi n \mid n \in Z\}$. ◉ Приведите уравнение к виду $2^{2\cos^2 x - 1} = 3 \times 2^{\cos^2 x} - 4$ и положите $2^{\cos^2 x} = t$; б) $\{\log_2(\pi n/4 + \pi/8) \mid n \in Z_0\}$;
в) $\left\{1;\ \frac{\pi}{12}\pi;\ \pi n - \frac{\pi}{12};\ \pi n + \frac{7}{12}\pi \mid n \in N\right\}$.

60. а) $\left\{2\pi n \pm \arccos\frac{\sqrt{57}-6}{3} + \frac{13\pi}{2};\ 2\pi n \pm \arccos\frac{\sqrt{57}-6}{3} \,\middle|\, n \in Z\right\}$;
б) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6} - \pi n \,\middle|\, n \in Z\right\}$;
в) $\left\{2\pi n \pm \arccos\frac{a}{2\cos(\pi/8)} + \frac{\pi}{8};\ \frac{\pi}{8} - 2\pi n \mp \arccos\frac{a}{2\cos(\pi/8)} \,\middle|\, n \in Z\right\}$
при $a \in \left[-2\cos\frac{\pi}{8};\ 2\cos\frac{\pi}{8}\right]$,
∅ при $a \in \left]-\infty;\ -2\cos\frac{\pi}{8}\right[\cup \left]2\cos\frac{\pi}{8};\ \infty\right[$.

61. а) $\left\{\frac{\pi}{5}(n+4k) \pm \frac{2\pi}{15} + \frac{(-1)^n}{5}\arcsin 2a;\ \frac{\pi}{5}(n-6k) + \frac{\pi}{5} + \frac{(-1)^n}{5}\arcsin 2a \,\middle|\, n,\ k \in Z\right\}$ при $a \in]-\infty;\ 0]$, ∅ при $a \in]0;\ \infty[$;

б) $\left\{\left(\pi\left(n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{6};\ \pi\left(\frac{k}{2}-n\right)+\frac{\pi}{3}\right);\right.$

$\left.\left(\pi\left(\frac{k}{2}+n\right)+\frac{\pi}{3};\ \pi\left(\frac{k}{2}-n\right)+\frac{\pi}{6}\right)\Big|\ k,\ n\in Z\right\}$;

в) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\pi m;\ \pi(2n-m)+\frac{\pi}{4}\right)\Big|\ m,\ n\in Z\right\}$;

г) $\left\{\left(2\pi n+\frac{\pi}{6};\ 2\pi k+\frac{\pi}{3}\right);\left(2\pi n+\frac{7\pi}{6};\ 2\pi k+\frac{4\pi}{3}\right);\right.$

$\left.\left(2\pi n-\frac{\pi}{6};\ 2\pi k+\frac{2\pi}{3}\right);\left(2\pi n+\frac{5\pi}{6};\ 2\pi k+\frac{5\pi}{3}\right)\Big|\ n,\ k\in Z\right\}$.

62. а) $\{(\pi n-\pi/4;\ \pi m+(-1)^m\pi/6)\mid n,\ m\in Z\}$;

б) $\{(2\pi n\pm 3\pi/4;\ \pi m+(-1)^m\pi/6)\mid n,\ m\in Z\}$;

в) $\left\{\left(2\pi n+\frac{\pi}{2};\ 2\pi k\pm\arccos\left(\frac{-a}{3}\right)\right)\Big|\ n,\ k\in Z\right\}$

при $a\in\,]-3;\ 3]$, $\{(2\pi n+\pi/2;\ 2\pi k);\ (2\pi n-\pi/2;\ \pi(2k+1))\mid n,\ k\in Z\}$

при $a=-3$, $\varnothing$ при $a\in\,]-\infty;\ -3[\cup]3;\ \infty[$;

г) $\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a};\ \pi k-\operatorname{arctg}(a+2)\right);\right.$

$\left.\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a+2};\ \pi k-\operatorname{arctg}a\right)\Big|\ n,\ k\in Z\right\}$

при $a\in\,]-\infty;\ -3]\cup[1;\ \infty[$,

$\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a};\ \pi k-\operatorname{arctg}(a+2)\right)\Big|\ n,\ k\in Z\right\}$ при $a\in\,]-3;\ -1]$,

$\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a+2};\ \pi k-\operatorname{arctg}a\right)\Big|\ n,\ k\in Z\right\}$ при $a\in\,]-1;\ 1[$.

63. $\left\{\left(\frac{\pi k}{2}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{8};\ \frac{\pi n}{5}-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Big|\ n,\ k\in Z\right\}$.

§ 8. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

1. а) $]\pi n;\ \pi n+\pi/2[$, $n\in Z$; б) $]4\pi n+2\pi;\ 4\pi n+4\pi[$, $n\in Z$;

в) $\left[2\pi n+\frac{7}{12}\pi;\ 2\pi n+\frac{23}{12}\pi\right]$, $n\in Z$;

г) $]\pi n-\pi/8+1/2;\ \pi n+5\pi/8+1/2[$, $n\in Z$; д) $\{-\pi/2+2\pi n\mid n\in Z\}$.

2. а) $]6\pi n-3\pi/2;\ 6\pi n+3\pi/2[$, $n\in Z$;

б) $]\pi n/2+\pi/8;\ \pi n/2+3\pi/8[$, $n\in Z$; в) $[2\pi n-\pi/6;\ 2\pi n+\pi/2]$, $n\in Z$;

г) $]4\pi n+3\pi/2-1/2;\ 4\pi n+5\pi/2-1/2[$, $n\in Z$; д) $\{2\pi n\mid n\in Z\}$.

3. а) $]\pi n/2;\ \pi n/2+\pi/4[$, $n\in Z$; б) $]4\pi n-2\pi;\ 4\pi n[$, $n\in Z$;

в) $]\pi n-\pi/12;\ \pi n+\pi/6[$, $n\in Z$;

г) $]\pi n/3-\pi/6+2/3;\ \pi n/3-\pi/9+2/3[$, $n\in Z$.

4. а) $]\pi n+\pi/2;\ \pi n+\pi[$, $n\in Z$; б) $]\pi n+\pi/4;\ \pi n+\pi/2]$, $n\in Z$;

в) $\left]\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}2;\ \frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{3}\right[$, $n\in Z$.

5. а) $]\pi n+\pi/6;\ \pi n+5\pi/6[$, $n\in Z$; б) $]\pi n+\pi/3;\ \pi n+2\pi/3[$, $n\in Z$;

в) $[\pi n-\pi/4;\ \pi n+\pi/4]$, $n\in Z$; г) $]\pi n+\pi/6;\ \pi n+5\pi/6[$, $n\in Z$.

6. а) $[2\pi n + \arcsin(1/3);\ 2\pi n + \pi/6\,[\cup] 2\pi n + 5\pi/6;\ 2\pi n + \pi - \arcsin(1/3)]$, $n \in Z$;
б) $[2\pi n + \pi - \arccos(1/4);\ 2\pi n + 2\pi/3\,[\cup] 2\pi n + 4\pi/3;\ 2\pi n + \pi + \arccos(1/4)]$, $n \in Z$;
в) $]\pi n - \operatorname{arctg} 2;\ \pi n + \operatorname{arctg} 3[$, $n \in Z$;
г) $[\pi n + \operatorname{arctg} 1,5;\ \pi n + \pi - \operatorname{arctg} 4[$, $n \in Z$.
7. $]\pi/3 + 2\pi n;\ 2\pi/3 + 2\pi n[$, $n \in Z$.
8. $[2\pi n - 2\pi/3;\ 2\pi n + 2\pi/3]$, $n \in Z$.
9. $]\pi n - \operatorname{arctg} 2;\ \pi n + \pi/3[$, $n \in Z$.
10. $]\pi n;\ \pi n + \pi/2] \cup [\pi n + 3\pi/4;\ \pi(n+1)[$, $n \in Z$.
11. $]-\pi/4 + 2\pi n;\ \pi/6 + 2\pi n[\cup]5\pi/6 + 2\pi n;\ 5\pi/4 + 2\pi n[$, $n \in Z$.
12. $]2n - 1,8;\ 2n - 7/8[$, $n \in Z$. ● $\cos \pi x = \sin(\pi/2 - \pi x)$.
13. $\left]\dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{5\pi}{24};\ \dfrac{\pi(n+1)}{2} + \dfrac{\pi}{24}\right[$, $n \in Z$. ● Покажите, что $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x = (3/4)\sin 4x$.
14. $\{\pi/2 + \pi n\} \cup [\pi n - \pi/4;\ \pi n - \pi/6] \cup [\pi n + \pi/6;\ \pi n + \pi/4]$, $n \in Z$.
● $\cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 2x \dfrac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \dfrac{\cos 2x(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1)}{2}$.
15. $\{R\}$, кроме $x = 3\pi/4 + 3\pi n/2$, $n \in Z$.
16. $]-\pi/8 + \pi n/2;\ \pi/8 + \pi n/2[$, $n \in Z$.
● $\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\dfrac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x$.
17. $\left]\pi n + \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3};\ \pi(n+1) - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3}\right[$, $n \in Z$. ● $8\sin^6 x - \cos^6 x = (2\sin^2 x - \cos^2 x)(4\sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x)$. Докажите, что $4\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x > 0$ при любом $x \in R$.
18. $]\pi n - \pi/4;\ \pi n - \pi/6[\cup]\pi n + \pi/6;\ \pi n + \pi/4[$, $n \in Z$.
19. $\left]2\pi n - \dfrac{\pi}{4} + \arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{3};\ 2\pi n + \dfrac{3\pi}{4} - \arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right[\cup]\pi(2n+1);\ 2\pi n + \dfrac{3\pi}{2}[$, $n \in Z$. ● Положите $\sin x + \cos x = y$.
20. $\left]\operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1);\ \dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\pi + \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1);\ \dfrac{5\pi}{4}\right[$.
21. $\left]\pi n + \arcsin\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2};\ \pi(n+1) - \arcsin\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right[$, $n \in Z$.
22. $[2\pi n - 7\pi/6;\ 2\pi n - \pi/6]$, $n \in Z$. 23. $]\pi/4 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n[$, $n \in Z$.
24. $[n + 1/4;\ n + 3/4]$, $n \in Z$. 25. $[4n^2\pi^2;\ (2n+1)^2\pi^2]$, $n \in Z_0$.
26. $\left[-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}};\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right] \cup \left[-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}(4n+1)};\ -\sqrt{\dfrac{\pi}{2}(4n-1)}\right] \cup \left[\sqrt{\dfrac{\pi}{2}(4n-1)};\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}(4n+1)}\right]$, $n \in N$.
27. $[-1/3;\ 1]$. 28. $[-\pi/6 + \pi n;\ \pi/6 + \pi n]$, $n \in Z$. 29. $]-\infty;\ 0[$, кроме $x = -n$, $n \in N$. 32. ● Исследуйте знак производной функции $y = (\operatorname{tg} x)^x$ на интервале $x \in]0;\ \pi/2[$.
33. $\left\{\pi n;\ \pi n + \dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1 + 2\sin a}{2}\right) \middle| n \in Z\right\}$ при $a \in]0;\ \pi/6] \cup [5\pi/6;\ 4[$, $\{\pi n \mid n \in Z\}$ при $a \in]\pi/6;\ 5\pi/6[$.

34. $\left\{\pi n;\ \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{2-\cos a}{2}\ \middle|\ n \in Z\right\}$ при $a \in \left[-1;\ \frac{\pi}{2}\right]$. $\{\pi n\ \ n \in Z\}$ при $a \in \left[\frac{\pi}{2};\ 3\right]$. 35. $\{\pi n \pm \operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{cosec} a - 1}\ \ n \in Z\}$ при $a \in [2;\ \pi[\ \cup\ ]2\pi;\ 8[$; при $a \in [\pi;\ 2\pi]$ функция критических точек не имеет.

ГЛАВА III

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1. ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

1. 60 км/ч. 2. 2 км/ч. 3. 60 км/ч. 4. $39\frac{7}{12}$ км. 5. 4 км/ч. 6. 40 км/ч, 120 км/ч. 7. 36 или 64 км/ч. 8. 20 км/ч, 12 км/ч. 9. 1 км/ч. 10. 30 км, 6 км/ч, 4 км/ч. ▲ Пусть S — искомое расстояние, v_1, v_2 — скорости пешеходов, идущих из пунктов A и B соответственно. Пути, пройденные пешеходами за равные промежутки времени, относятся как их скорости. Исходя из этого, получаем систему уравнений

$$\frac{S-12}{12}=\frac{v_1}{v_2},\quad \frac{12+S-6}{S-12+6}=\frac{v_1}{v_2}.$$

Исключая из этих уравнений v_1/v_2, получаем уравнение $S^2-30\cdot S=0$, откуда $S=30$. Скорости пешеходов находятся из соотношений $S+6=6v_1$, $S-6=6v_2$. 11. $8a$ км, $\frac{8a}{35}$ км/ч, $\frac{8a}{50}$ км/ч. 12. 10 км. 13. 18 км/ч. 14. $l(t_2/t_1+1)$ см; $l^2\frac{(t_1+t_2)}{t_1(lt_2+(S+l)t_1)}$ см/с; $\frac{lS}{lt_2+(S+l)t_1}$ см/с. 15. 20 м/мин; 15 м/мин; 280 м. 16. $(8\pm\sqrt{7})/2$ ч, 4,5 ч, 3,5 ч, 9,5 ч, $(8+\sqrt{127})/2$ ч. 17. 10 км/ч, 3 км/ч. 18. 18 км/ч, 24 км/ч. 19. 5 км/ч, 4 км/ч. 20. $0{,}5\left(b+\sqrt{b^2+4ab}\right)$ км. 21. $(10+\sqrt{52})$ км, $(\sqrt{52}\pm 2)$ км. 22. 15 : 8. 23. 4 ч. 24. 18 мин. 25. В $\sqrt{10}$ раз. ▲ Пусть S — расстояние между пунктами A и B, u — собственная скорость буксира, v — скорость течения. Составим систему уравнений:

$$\frac{S}{u+v}+\frac{S}{u-v}=13,\quad \frac{S}{2u+v}+\frac{S}{2u-v}=6.$$

Полагая $u+v=x$, $u-v=xv$ и поделив первое уравнение на второе, получим уравнение $\frac{2Sx}{x^2-1}:\frac{4Sx}{4x^2-1}=\frac{13}{6}$, откуда найдем x. 26. $a(\sqrt{2}+1)$ ч. 27. 10 и 5 ч. 28. 3 и 6 ч, или $(\sqrt{145}-1)/6$ ч и $\frac{\sqrt{145}+17}{6}$ ч. 29. $\frac{m(p+n)+2np}{2p}$ мин, $\frac{m(p+n)+2np}{2n}$ мин.

$\frac{m(p+n)+2np}{p+n}$ мин. 30. 36 ч, 45 ч. ▲ Найдем, какое время t автомобили двигались до встречи, для чего составим систему уравнений:

$$16v_1 = v_2 t, \quad 25v_2 = v_1 t.$$

Поделив первое уравнение на второе, получим $(v_1/v_2)^2 = 25/16$ или $v_1/v_2 = 5/4$, после чего легко найти t. 31. 3 ч. 32. В 10 ч 29 мин. ▲ Пусть S — расстояние между пунктами A и B, v_1 и v_2 — скорости первого и второго автомобилей соответственно, t — первоначальное время движения автомобилей до встречи. Имеем следующую систему уравнений:

$$S = (v_1+v_2)\,t, \quad S = (2v_1+v_2)\left(t-\frac{14}{15}\right), \quad S = (v_1+2v_2)\left(t-\frac{13}{12}\right).$$

Из них получаем:

$$\frac{v_1+v_2}{S} = \frac{1}{t}, \quad \frac{2v_1+v_2}{S} = \frac{1}{t-14/15}, \quad \frac{v_1+2v_2}{S} = \frac{1}{t-13/12}.$$

Складывая два последних уравнения и учитывая первое, имеем уравнение $\frac{3}{t} = \frac{1}{t-14/15} + \frac{1}{t-13/12}$, которое после простых преобразований примет вид $30t^2 - 121t + 91 = 0$, откуда $t_1 = 1$ (посторонее решение) и $t_2 = 182/60$. Если скорости обоих автомобилей удвоить, то время движения их до встречи

$$\tau = \frac{S}{2(v_1+v_2)} = \frac{t_2}{2} = 1 \text{ ч } 31 \text{ мин}.$$

Вычитая этот результат из 12, получаем ответ.

§ 2. ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ, СМЕСИ, ЧИСЛА, РАБОТУ

1. 15 м. 2. 60 %. 3. 25 дней, 20 дней, 30 дней. 4. 10 дней. 5. 10 ч, 15 ч. 6. 16 ч. 7. В 6 раз. 8. 3 ч, 6 ч, 2 ч. 9. 14 ч, 10,5 ч. 10. $\frac{1}{4}\left[2(t+d) - \sqrt{2t^2+4d^2}\right]$, $\frac{1}{4}\left[2(t-d) - \sqrt{2t^2+4d^2}\right]$. Задача имеет решение, если $t > 4d > 0$. 11. 40 м, 25 м. 12. 45 м черной, 36 м зеленой, 30 м синей. 13. 50 м³/мин. 14. 4,8 ч; 4,8 ч или 4 ч; 6 ч. 15. 15 ч. ▲ Пусть x — время, в течение которого был открыт второй кран, p_1 и p_2 — скорости поступления воды из первого и второго кранов соответственно. Тогда имеем систему

$$p_1(x+5) + p_2 x = 425, \quad 2p_1 x = p_2(x+5), \quad (p_1+p_2)\,17 = 425.$$

Из второго и третьего уравнений получаем:

$$p_1 = 25\,\frac{x+5}{3x+5}; \quad p_2 = \frac{50x}{3x+5}.$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение, находим $3x^2 - 41x - 60 = 0$, откуда $x = 15$ ($x = -4/3$ — посторонний корень). 16. 2 ч. 17. 6 ч. 18. 10 мин. 19. $(2(30p-1950))/(434-7p)$ кг, $(5(30p-1950))/(434-7p)$ кг. Задача имеет решение при $62 < p < 65$.

20. $(4q-280)/(90-q)$ л. Задача имеет решение при $70 \leqslant q \leqslant 76\frac{2}{3}$. 21. 25 %. 22. 749 денежных единиц. 23. 0,25 л глицерина, 1,75 л воды. 24. $\frac{9k-1}{k-1}a$ %. 25. $12p/(4a^2-7a+3)$ %; $12a^2p/(4a^2-7a+3)$ %; $12ap/(4a^2-7a+3)$ %. 26. 64; 46. 27. 63. 28. 863. 29. 36; 63.

§ 3. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ. ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

1. 7842. 2. $[4; (8+\sqrt{61})/3]$. 3. 8. 4. $]3; 5[$. 5. 12. 6. 180 р. ▲ Пусть x р. — первоначальный взнос каждого студента, y — число студентов в группе, тогда $170 < xy < 195$, $xy=(x+1)(y-2)$. Из уравнения получаем $x=(y-2)/2$. Подставляя это значение x в систему неравенств, найдем, что $1+\sqrt{341} < y < 1+\sqrt{391}$. Так как y — натуральное число, то последней системе неравенств удовлетворяют два числа: 19 и 20. Все условия задачи выполняются лишь при $y=20$, $x=9$, поэтому $xy=9\cdot 20=180$. 7. 9 р. 8. 3 т. 9. 6 ч. ▲ Пусть S — расстояние между пунктами A и B, u — собственная скорость катера, v — скорость течения. Имеем следующую систему уравнений и неравенств:

$$\frac{S}{v}=24,\quad \frac{S}{u+v}+\frac{S}{u-v}\geqslant 10,\quad \frac{S}{1{,}4u+v}+\frac{S}{1{,}4u-v}\leqslant 7.$$

Надо определить $S/(u-v)$. Полагая, что $u/v=x$ (по смыслу задачи $x>1$), преобразуем неравенства

$$\frac{S}{v}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\geqslant 10,\quad \frac{S}{v}\left[\frac{1}{1{,}4x+1}+\frac{1}{1{,}4x-1}\right]\leqslant 7.$$

Так как $\frac{S}{v}=24$ и $x>1$, то после преобразования получим систему неравенств, эквивалентную исходной:

$$5x^2-24x-5\leqslant 0,\quad 1{,}96x^2-9{,}6x-1\geqslant 0.$$

Эта система совместна при $x=5$. Далее получаем:

$$\frac{S}{u-v}=\frac{S}{v}\cdot\frac{1}{x-1}=24\cdot\frac{1}{5-1}=6.$$

10. 11 двоек, 7 троек, 10 четверок, 2 пятерки. ▲ Пусть x — число двоек, y — число троек, z — число четверок, t — число пятерок. Имеем систему

$$x+y+z+t=30,\quad 2x+3y+7z+3t=93,\quad y>t=2m,$$
$$y<z=10k,\quad m\in Z_0,\quad k\in Z_0.$$

Подставляя значение x из первого уравнения, $x=30-(y+z+t)$, во второе уравнение, получаем: $y+3t=33-2z$. Отсюда находим z; из условия задачи следует, что z может принимать лишь значения 0, 10, 20, 30.

Значение $z=0$ не подходит, так как неравенство $y<0$ теряет смысл; $z=20$ и $z=30$ также не подходят, так как не выполняется неравенство $33-2z\geqslant 0$. Значит, $z=10$. Далее имеем $y=13-3t>t$, отсюда $0\leqslant t<3{,}25$. При $t=0$ $y=13>z$ (не удовлетворяет условию задачи). Следовательно, $t=2$ и $y=13-6=7$, затем находим $x=30-(7+10+2)=11$. 11. 11 лип, 5 берез. ▲ Пусть x — число берез, y — число лип. Имеем систему неравенств

$$x+y>14,\ 2y<x+18,\ 2x<y.$$

Складывая второе и третье неравенства, получаем $x+y<18$. Таким образом, возможны три случая: $x+y=15$, $x+y=16$ и $x+y=17$. Рассмотрим их:

1) если $y=15-x$, то

$$\begin{cases} 2(15-x)<x+18, \\ 2x<15-x \end{cases} \Rightarrow 4<x<5.$$

Так как x — натуральное число, то устанавливаем, что этот случай не имеет места;

2) если $y=16-x$, то

$$\begin{cases} 2(16-x)<x+18, \\ 2x<16-x \end{cases} \Rightarrow 4\frac{2}{3}<x<5\frac{1}{3};$$

$x=5$ удовлетворяет этой системе; $y=16-5=11$;

3) при $y=17-x$

$$\begin{cases} 2(17-x)<x+18, \\ 2x<17-x \end{cases} \Rightarrow 5\frac{1}{3}<x<5\frac{2}{3}.$$

Здесь, как и в первом случае, натуральных x, удовлетворяющих системе неравенств, нет. Таким образом, возможен лишь один случай, когда $x=5$, $y=11$. 12. $5\frac{4}{7}$ мин. 13. $\frac{25}{7}$ м³/ч. ▲ Пусть S — объем бассейна ($S>0$), тогда

$$t(v)=\frac{0{,}3S}{30+(30-3v)}+\frac{0{,}7S}{30+(30-3v)+(30+10v)}=$$

$$=\frac{S}{10}\left(\frac{1}{20-v}+\frac{7}{90+7v}\right).$$

Найдем производную функции $t(v)$:

$$t'(v)=\frac{S}{10}\left(\frac{1}{(20-v)^2}-\frac{49}{(90+7v)^2}\right),\ t'(v)=0 \text{ при } v=\frac{25}{7},$$

$$\frac{25}{7}\in\,]0;\ 10[,$$

в точке $v=25/7$ производная меняет знак (в точке слева значения производной отрицательны, справа — положительны), поэтому в точке $v=25/7$ функция $t(v)$ имеет минимум. 14. 6 км/ч. ● Исследуйте на экстремум функцию $t(v)=6/v+2/3+0{,}25v\,(2/3+6/v)$, $v>0$, где $t(v)$ — полное время движения пешехода. 15. 0 л, если $p\in\,]20;\ 100]$; $]0;\ 3]$ л, если $p\in\{20\}$; 3 л, если $p\in\,]0;\ 20[$. 16. 62,5 и 55 %. ▲ Пусть первого сплава взяли x кг, второго

y кг и третьего z кг. Так как вновь полученный сплав содержит 15 % висмута, то имеем уравнение $3x+y-3z=0$, причем $z\neq 0$ и $z\neq x$. Процентное содержание свинца в новом сплаве равно

$$p(x)=5\,\frac{11x+10y+14z}{x+y+z}=\frac{5}{2}\cdot\frac{44z-19x}{2z-x}=\frac{5}{2}\cdot\frac{44-\frac{x}{z}}{2-\frac{x}{z}},$$

$$0\leqslant\frac{x}{z}\leqslant 1.$$

Функция $p(x/z)$ принимает наибольшее и наименьшее значения в конце отрезка: при $x/z=0$ и при $x/z=1$. 17. 0 м/с²; $11\frac{1}{3}$ м.

● Для нахождения пути воспользуйтесь формулой $S=\int\limits_0^4 v(t)\,dt$.

ГЛАВА IV

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА

1. а) $2x+C$; б) $x-1{,}5x^2+C$; в) $(2x-1)^2+C$. 2. а) $C-x^3/3$; б) $x^3/3-2x^2-\sqrt{3}\,x+C$; в) $2(3x+2)^3+C$. 3. а) $0{,}5x^2-0{,}75x^4+C$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{x^6}{6}+C$; в) $\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{5}+C$; г) $(3x-4)^{101}/303+C$; д) $C-(1-5x)^8/40$. 4. а) $C-1/x$; б) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}+C$; в) $2x^3-\frac{1}{2(2x-1)}+C$; г) $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+C$. 5. а) $\frac{\sqrt{x}}{2}+C$; б) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-x+C$; в) $\frac{x^2}{2}+\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$; г) $x\left(\frac{7}{8}\sqrt[7]{x}-\frac{5}{6}\sqrt[5]{x}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x}\right)+C$; д) $\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}+C$; е) $\frac{(4x-5)\sqrt{5-4x}}{6}+C$. 6. а) $2\ln|x|+C$; б) $C-\frac{1}{2}\ln x$; в) $-\ln|1-x|+C$; г) $\frac{3}{4}\ln|4x-1|+C$. 7. а) $\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$; б) $\ln|x/(x+1)|+C$. ● $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$; в) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x+4}\right|+C$; г) $\ln|x^2+3x|+C$. ● $\frac{2x+3}{x^2+3x}=\frac{x+x+3}{x(x+3)}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x}$. 8. а) $\operatorname{arctg}x+C$; б) $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. ● $\frac{2}{x^2+4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+(x/2)^2}$; в) $3\operatorname{arctg}x-1/x+C$. ● $\frac{4x^2+1}{x^2(1+x^2)}=\frac{3}{1+x^2}+\frac{1}{x^2}$;

г) $\ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C$. ● $\dfrac{(x+1)^2}{x(1+x^2)} = \dfrac{(x^2+1)+2x}{(x^2+1)x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{1+x^2}$.

9. а) $4\arcsin x + C$; б) $\dfrac{1}{2}\arccos 2x + C$; в) $\arcsin x + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + C$.

● $\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1}{1-x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\right)$.

10. а) $2^x/\ln 2 + C$; б) $-3^{-x}/\ln 3 + C$; в) $(e^{4x}+x^2)/2 + C$; г) $C - e^{-x}$; д) $(e^x - e^{-x})/2 + C$; е) $(e^x + e^{-x})/2 + C$. 11. а) $C - 2\cos x$; б) $C - 6\cos\dfrac{x}{2}$; в) $C - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; г) $\dfrac{1}{2}\cos\left(10x + \dfrac{\pi}{8}\right) + C$.

12. а) $4\sin x + C$; б) $C - 10\sin\dfrac{x}{5}$; в) $2\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) + C$; г) $\dfrac{2}{7}\sin(7x-1) + C$. 13. а) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C$. ● $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; б) $-x - \dfrac{\sin 4x}{4} + C$; в) $\dfrac{1}{4}\sin 4x + \dfrac{1}{6}\sin 6x + C$. ● $2\cos x\cos 5x = \cos 4x + \cos 6x$; г) $\dfrac{1}{3}\sin 3x - \dfrac{1}{11}\sin 11x + C$; д) $-\dfrac{1}{5}\cos 5x - \dfrac{1}{11}\cos 11x + C$; е) $\dfrac{1}{10}\cos 10x - \dfrac{1}{12}\cos 12x + C$. 14. а) $\dfrac{3}{4}\operatorname{tg} 4x + C$; б) $-4\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} + C$; в) $\operatorname{tg} x - x + C$. ● Используйте тождество $1 + \operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$; г) $C - \operatorname{ctg} x - x$. 15. а) $x^3 - 2x$. ▲ $F(x) = \int(3x^2-2)\,dx = x^3 - 2x + C$. Имеем $F(2) = 2^3 - 2\cdot 2 + C = 4$, откуда $C = 0$; б) $x + \sin x + (1/2)\sin 2x + 1$; в) $3\sin x + 2\cos x - 2$; г) $2e^{x/2} + 1$. 16. а) $\arcsin^2 x$; б) $\sin^8 x + \sqrt{1+x^4}$. 17. а) $\{-4; 1\}$. ● $f'(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) - 24$: б) $\left\{\dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{\pi}{4}\,\middle|\, n \in Z_0\right\}$; в) $\left\{\dfrac{\pi n}{4} + \dfrac{\pi}{8};\ \pi n \pm \dfrac{\pi}{3}\,\middle|\, n \in Z\right\}$; г) $\{\pi n/2 \pm (1/4)\arccos(2a-1)/3\ n \in Z\}$ при $a \in [-1; 2]$, при $a \notin [1; 2]$ функция критических точек не имеет; д) $\{\pi n + (-1)^n \pi/6\ \ n \in Z\}$. 18. а) $-33\dfrac{3}{4}$; б) 0; в) 1; г) π; д) 2π. 19. $\left\{\dfrac{1}{2}; 2\right\}$. 20. $]0; 4[$. 21. $\{\pi/2; 7\pi/6; 3\pi/2; 11\pi/6\}$. 22. $\{-1/4\}$.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

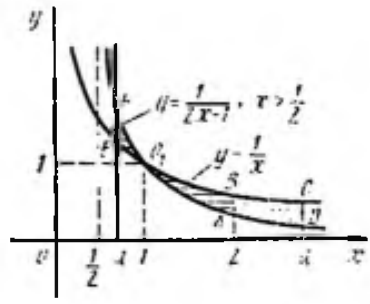
1. а) 1/2; б) 4; в) 9/8. ● Интегрирование проведите по переменной y; г) 25/2. ● Для нахождения пределов интегрирования решите системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -11, \\ 4x + 3y = 27; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y = -11, \\ x + 7y = 13; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 7y = 13, \\ 4x + 3y = 27. \end{cases}$$

2. а) $\dfrac{61}{3}$; б) 18; в) 90; г) 8; д) $\dfrac{32}{3}$; е) 4,5. 3. а) 4,5; б) 4;

в) $57\frac{1}{6}$. ● Вычисление площади фигуры проведите в новой системе координат, получаемой из старой путем переноса $r\ (0; -4)$; г) 1/6; д) 37/48. 4. 19/24. 5. 9/8. 6. 0,5. 7. 125/2. 8. $\{\pm\sqrt{2/3}\}$. 9. $\{-1; \sqrt[3]{8-\sqrt{17}}\}$. ● Рассмотрите случаи $c<1$ и $c>1$. 10. а) $23-5\ln\frac{28}{5}$; б) $\frac{3}{4}-\ln 2$; в) $12-5\ln 5$; г) $(2\sqrt{5}-3)/2+\ln(\sqrt{5}-1)/2$. 11. а) 4; б) 3; в) 23275/4. 12. $4\ln(3/2)-1{,}5$. 13. $\{1/4;\ 49/4\}$. ● Рассмотрите случаи $c<4$ и $c>4$. 14. а) 7/6; б) 1/3; в) 8/9; г) 548/3. 15. а) 9; б) $2\frac{2}{3}$; в) $35\frac{5}{24}$. 16. а) $1/3+\ln 2$; б) $13/3-4\ln 2$; в) $16{,}5-8\ln 2$; г) $48\ln 2-11{,}25$; д) 20/3; е) $\ln 2$. 17. а) $4-\ln 3$; б) $\frac{1}{6}\ln\frac{3e}{8}$. 18. $\{(12-2\sqrt{21})/5;\ 8\}$.

▲ Кривые $y=1/x$ и $y=1/(2x-1)$ пересекаются в точке $O_1(1; 1)$ (это следует из решения уравнения $1/x=1/(2x-1)$). Рассмотрим возможные случаи расположения прямой $x=a$: $1/2<a<1$, $1<a<2$ и $a>2$. 1) Если $1/2<a<1$, то площадь фигуры (см. рис.) равна сумме площадей фигур EO_1F и AO_1B:



$$\ln\frac{4}{\sqrt{5}}=\int_a^1\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{x}\right)dx+$$

$$+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x-1}\right)dx.$$

Интегрируя правую часть, получаем

$$\ln\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-1}{x^2}\right|_a^1+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{2x-1}\right|_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\ln\frac{2a-1}{a^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

или

$$\ln\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2}{2a-1}. \qquad (1)$$

Правая часть уравнения (1) представляет собой площадь криволинейного треугольника EO_1F $\left(\ln\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}>0\right)$. Далее имеем $a^2/(2a-1)=12/5$,

$$5a^2-24a+12=0; \qquad (2)$$

$a_1=(12-2\sqrt{21})/5$, $a_2=(12+2\sqrt{21})/5$. Устанавливаем, что условию $1/2<a<1$ удовлетворяет только корень a_1.

2) При условиях $1<a<2$ прямой $x=a$ не существует (в случае $1/2<a<1$ установлено, что площадь данной фигуры больше площади криволинейного треугольника AOB),

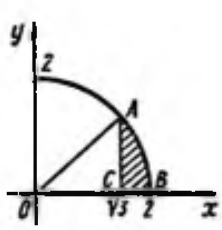
3) В случае $a > 2$ площадь заданной фигуры равна площади фигуры $ABCD$:

$$\ln \frac{4}{\sqrt{5}} = \int_{\frac{1}{2}}^{a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1} \right) dx. \qquad (3)$$

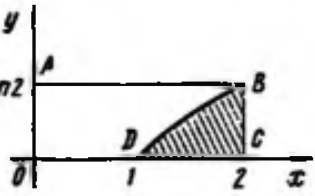
После интегрирования правой части полученного уравнения и преобразований его получаем: $15a^2 - 128a + 64 = 0$; $a_1 = 8$, $a_2 = 8/15$. Значение a_2 не удовлетворяет неравенству $a > 2$, поэтому является посторонним. Таким образом, условию задачи удовлетворяют значения $a \in \{(12 - 2\sqrt{21})/5;\ 8\}$. 19. а) $\log_3 e$; б) $\log_4 e$; в) $(30 - 8 \ln 2)/\ln 2$; г) $8(1 - 1/(8! \ln 3))$. 20. а) $2e^3 + 1$; б) $(e^3 - 4)/e^4$; в) $33/2 + e^{-3}$; г) $e^2 - 2$. 21. $360/(\ln 3) - 162$. ● Для нахождения значений k и m решите систему уравнений

$$k + m = 34, \quad 3^{-1}k + m = 14.$$

22. $4 \log_8 \frac{e^4}{27}$. ● Для нахождения коэффициента b решите уравнение $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 40 \ln 5) = b5 \ln 5$. 23. $3{,}5 - 12 \ln \frac{4}{3}$. 24. а) 4. ● $S = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, dx$; б) $1/(3\sqrt{2})$; в) $2\sqrt{2}$; г) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})/4$. 25. а) $\pi\sqrt{3}/12 + \sin 1 - 1/2$; б) $1 + \pi/3 - \cos 3 - \sqrt{3}$; в) $(2\sqrt{2}/3)\arcsin(2\sqrt{2}/3) - 2/3$; г) $2 + \cos 2$. 26. а) $\{-\pi/18;\ \pi/9\}$. ● Рассмотрите случаи $-\frac{\pi}{6} \leqslant k < \frac{\pi}{18}$ и $\frac{\pi}{18} < k \leqslant \frac{\pi}{6}$; б) $\left\{-\frac{\pi}{30};\ \frac{\pi}{6}\right\}$. 27. а) π. ▲ Так как подынтегральная функция $y = \sqrt{4 - x^2}$ неотрицательна на отрезке $[0;\ 2]$, то значение искомого интеграла численно равно площади фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, которая представляет собой четверть круга радиуса 2 (см. рис.). Таким образом, значение интеграла равно $\pi \cdot 2^2/4 = \pi$;



б) $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}$. ● $I = S_{ABC} = S_{AOB} - S_{AOC}$ (см. рис.)

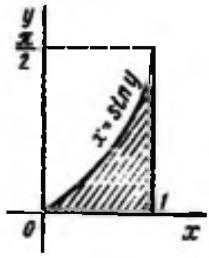


28. $2 \ln 2 - 1$. ▲ $I = S_{BCD} = S_{OABC} - S_{ABDO}$ (см. рис.). Найдем площади фигур $OABC$ и $ABDO$. Так как $OABC$ — прямоугольник, то $S_{OABC} = 2 \cdot |BC|$, а $|BC| = \ln 2$; поэтому $S_{OABC} = 2 \ln 2$. Площадь криволинейной трапеции $ABDO$ найдем, проинтегрировав функцию $x = e^y$ в пределах от 0 до $\ln 2$ (координаты точек O и A соответственно):

$$S_{ABDO} = \int_0^{\ln 2} e^y\, dy = e^{\ln 2} - 1 = 1,$$

Окончательно имеем $I=2\ln 2-1$. 29. $\pi/2-1$. ▲ Значение интеграла равно площади S заштрихованной фигуры (см. рис.). Найдем эту площадь:

$$S=\int_0^{\pi/2} 1\,dy-\int_0^{\pi/2}\sin y\,dy=\frac{\pi}{2}-1.$$



ГЛАВА V

ПРОГРЕССИИ И ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. ПРОГРЕССИИ

1. Нет. ● Покажите, что уравнение $1+4(n-1)=10091$ не имеет решений в целых числах. 2. 13. 3. 99270. 4. 16, 12, 8, ..., -16, -20. ▲ Пусть a_1 — первый член прогрессии, d — ее разность. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1+a_2+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}=0, \\ a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n=-36, \\ a_{10}-a_9=-16. \end{cases}$$

Из третьего уравнения имеем $(a_1+9d)-(a_1+5d)=-16$; $d=-4$. Вычтем из первого уравнения системы второе, тогда получим $a_1-a_n=36$ или $-d(n-1)=36$, $-(-4)(n-1)=36$ и $n=10$. Для нахождения a_1 преобразуем левую часть первого уравнения и найдем a_1:

$$\frac{a_1+a_{n-1}}{2}(n-1)=\frac{a_1+a_1-4(9-1)}{2}9=0;\quad a_1=16.$$

5. 11, 13, 15, ..., 29, 31. 6. 1, 3, 5, ..., 17, 19. 7. 7. 8. 8, 12, 16, ... ▲ Из условия задачи имеем систему

$$\begin{cases} a_2=a_1+d=12, \\ 200<\dfrac{a_1+a_9}{2}\cdot 9<220. \end{cases}$$

Из уравнения системы выразим a_1 через d и подставим в неравенство $200<((2(12-d)+8d)/2)9<220$. После преобразований получаем $3\frac{11}{27}<d<4\frac{4}{27}$. Так как все члены прогрессии — натуральные числа, то разность d прогрессии должна быть целым числом. Последнему неравенству удовлетворяет $d=4$ (других целых чисел на интервале $\left]3\frac{11}{27};\ 4\frac{4}{27}\right[$ нет). Далее находим первый

член прогрессии: $a_1 = 12 - 4 = 8$. 9. -4. 10. 5; 9; 13; ... . 11. $a_1 = 4$; $d = 5$. 12. 1/9, 1/6, 1/3. ▲ Пусть x, y, z — искомые числа; имеем систему уравнений

$$x + y + z = 0{,}6\ (1) = \frac{11}{18};\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 18,\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}.$$

(Здесь $1/x$; $1/y$; $1/z$ — последовательные члены прогрессии. Вычитая из второго уравнения системы третье, получаем $y = 1/6$. Подставим это значение y в первое и второе уравнения системы, тогда получим систему

$$x + z = 4/9,\quad (x + z)/(xz) = 12,$$

решения которой найдем, подставляя $z = 4/9 - x$ во второе ее уравнение. 13. $-3a/\sqrt{28}$, $-2a/\sqrt{28}$, $-a/\sqrt{28}$, ...; $3a/\sqrt{28}$, $2a/\sqrt{28}$, $a/\sqrt{28}$, ... 14. $\{\pm\sqrt{25b - 9}/4\}$ при $b \in [1; \infty[$. ▲ Из условия задачи имеем систему уравнений

$$a_2 a_{12} = 1,\quad a_1 a_{10} = b.$$

Так как $a_2 = a_1 + 6d$, то $a_1 = a_2 - 6d$ и полученную систему можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} (a_2 - 5d)(a_2 + 5d) = 1, \\ (a_2 - 3d)(a_2 + 3d) = b \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_2^2 - 25d^2 = 1, \\ a_2^2 - 9d^2 = b, \end{cases}$$

откуда $d^2 = (b - 1)/16$ и $a_2^2 = (25b - 9)/16$; $a_2 = \pm\sqrt{25b - 9}/4$. Поскольку должны выполняться неравенства $d^2 \geqslant 0$, $a_2^2 \geqslant 0$, то одновременно должны выполняться неравенства

$$b - 1 \geqslant 0\ (1) \quad \text{и} \quad 25b - 9 \geqslant 0\ (2).$$

Решая систему линейных неравенств (1) и (2), находим $b \in [1; \infty[$. При других значениях параметра b система уравнений действительных решений не имеет, т. е. не существует арифметической прогрессии, членами которой являются действительные числа. 15. $(116k - 39)/90$ при $k \in [-6; 3/2]$. 16. $(34 - 29b)/10$ при $b \in [1; 9/4]$. 17. $-(p + q)$. 18. 6. ▲ По условию задачи, $\frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{a_{n+1} + a_{2n}}{4} n$, откуда получаем $a_1 + a_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{2n})$.

Теперь находим искомое отношение:

$$\frac{(a_1 + a_{3n})\,3n}{2} : \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{3(a_1 + a_{3n})\,2}{a_{n+1} + a_{2n}} = 6\,\frac{2a_1 + d(3n - 1)}{2a_1 + d(n + 2n - 1)} = 6.$$

19. -1; 0; 1; 2. ▲ Пусть $a - d$, a, $a + d$ и $a + 2d$ — искомые числа. Будем предполагать, что прогрессия возрастающая. Тогда имеем уравнение, которое и решаем относительно a:

$$(a - d)^2 + a^2 + (a + d)^2 = (a + 2d),\quad 3a^2 - a + 2d^2 - 2d = 0;$$

$$a = (1 \pm \sqrt{-24d^2 + 24d + 1})/6. \qquad (1)$$

Действительные решения будут существовать, если

$$-24d^2 + 24d + 1 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad \frac{12 - \sqrt{168}}{24} \leqslant d \leqslant \frac{12 + \sqrt{168}}{24}.$$

В этом промежутке содержится лишь два целых числа: 0 и 1. Ноль отбрасываем, так как по условию все искомые числа различные. При $d=1$ из (1) находим $a=0$, $a-d=-1$; $a+d=+1$, $a+2d=2$. 20. 13. 21. $(np/2)(1+np)$. 22. 2,4. 23. $a_1=8$, $q=2$. 24. 39 или $-10{,}5$. 25. ± 4. 26. 2, 6, 18, ...; 18, 6, 2, ... 27. $\sqrt[3]{A/B}$. 28. $12/q^{100}$. 29. S_2/S_1. ▲ По условию имеем систему

$$a_1+a_3+\ldots+a_{999}=S_1, \quad a_2+a_4+\ldots+a_{1000}=S_2.$$

Умножим первое уравнение на знаменатель прогрессии q:

$$a_1q+a_3q+\ldots+a_{999}q=a_2+a_4+\ldots+a_{1000}=S_1q.$$

Решив далее уравнение $S_2=S_1q$, получим ответ. 30. $\pm\sqrt[10]{S_2/S_1}$. 31. 6. ▲ Пусть a_1 — первый член прогрессии, q — ее знаменатель, n — число членов. Тогда имеем систему уравнений

$$a_1+a_1q^{n-1}=66 \quad a_1^2q^{n-1}=128 \quad a_1(1-q^n)/(1-q)=126.$$

Умножая первое уравнение системы на a_1 и учитывая, что $a_1^2q^{n-1}=128$, получаем $a_1^2-66a_1+128=0$; $(a_1)_1=64$ и $(a_1)_2=2$. Далее из второго уравнения находим $(q^{n-1})_1=1/32$ и $(q^{n-1})_2=32$. Так как $q^n=(q^{n-1})q$ то, подставляя полученные значения a_1 и q^{n-1} в третье уравнение системы, находим знаменатель прогрессии $q_1=1/2$, $q_2=2$. Поскольку прогрессия возрастающая, то значение q_1 является посторонним. Решив теперь уравнение $2^{n-1}=32=2^5$, получим ответ. 32. 600 м/мин. ▲ Пусть v_1, v_2, v_3 (м/мин) — соответственно скорости первого, второго и третьего конькобежцев. Из условия задачи следует, что $v_3<v_1<v_2$, т. е. $v_1^2=v_2v_3$. Далее, имеем систему уравнений

$$v_2t=v_1t+400, \quad v_1t=v_3(t+2/3),$$

где t — время, в течение которого второй конькобежец обошел первого на круг. Исключая из этих уравнений t, получаем $(v_2-v_1)v_3/(v_1-v_3)=(v_1^2-v_1v_3)/(v_1-v_3)=v_1=600$. 33. ● $S_{2n}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}=a_{n+1}(1-q^n)/(1-q)$; $S_{3n}-S_{2n}=a_{2n+1}(1-q^n)/(1-q)$. 34. $\sqrt[3]{2/3}$. 35. 1029/38. ▲ Пусть последовательность a_1, a_2, ..., a_n, ... — геометрическая прогрессия. Покажем, что последовательность a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k, ..., $k\in N$, также является геометрической прогрессией. Действительно, так как $a_{i+1}=a_iq$, $i\in N$ то

$$a_{i+1}^k=a_i^kq^k \quad \text{и} \quad a_{i+1}^k/a_i^k=q^k=\text{const},$$

не зависящая от номера последовательности i. Таким образом последовательности квадратов и кубов членов бесконечно убывающей прогрессии также являются бесконечно убывающими прогрессиями. Поэтому имеем систему уравнений

$$\frac{a_1}{1-q}=7/2, \quad \frac{a_1}{1-q^3}=147/16,$$

решив которую найдем $a_1=3$, $q=1/7$ (для этого достаточно возвести первое уравнение в квадрат и разделить его на второе уравнение). Подставляя теперь полученные значения a_1 и q в формулу $a_1^2/(1-q^2)$, получаем ответ. 36. 100/3. 37. $(3\sqrt{3}-3)/(2\sqrt{3})$

или $-(3\sqrt{3}+1)/(2\sqrt{3})$. 38. 405, —270, 180, ... 39. 2/3. 40. 27 или 3. 41. 2; 5; 8. 42. 7; 14; 21. 43. 2,5 или 22,5. 44. 931. 45. 4, 20, 100; 4/9, 52/9, 676/9. 46. 4, 12, 36; 4/9, —20/9, 100/9. 47. $2 \pm \sqrt{3}$. 48. 4, 20, 100 и 5, 20, 35; 100, 20, 4 и 101, 20, —61. 49. 5, 5. 5; 10/3, 5, 15/2. 50. 2. 51. 3, 6, 9, 12. 52. 1, 4, 16, 64. 53. 2, 5, 8, ...; 3, 6, 12, ... и $\frac{25}{2}, \frac{79}{6}, \frac{83}{6}, \ldots$; $\frac{2}{3}, \frac{25}{3}; \frac{625}{6}, \ldots$.

§ 2. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. ▲ а) Выберем произвольно положительное число ε и покажем, что для него можно найти такое натуральное N, что для всех номеров $n > N$ будет выполняться неравенство

$$|1/n - 0| < \varepsilon. \qquad (1)$$

После преобразований получим неравенство $n > 1/\varepsilon$. Если номер n больше, чем $1/\varepsilon$, то неравенство (1) будет выполняться, т. е. N можно взять равным $[1/\varepsilon]$, где $[1/\varepsilon]$—целая часть числа $1/\varepsilon$. Таким образом существование числа N такого, что при любых $n > N = [1/\varepsilon]$ неравенство (1) выполняется, показано и тем самым доказательство завершено. *Замечание.* В качестве N можно взять любое натуральное число, большее $1/\varepsilon$; б) ● Покажите, что N можно взять равным $[(2-\varepsilon)/\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$; в) ● Воспользуйтесь доказательством утверждения $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $0 < q < 1$.

2. ▲ *1-й способ.* Последовательность (x_n) называется ограниченной, если найдутся такие два числа m и M, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $m \leqslant x_n \leqslant M$. Докажем существование чисел m и M для данной последовательности. Все члены последовательности с общим членом $(1+(-1)^n)/n^2$ неотрицательны (при $n = 2k-1$ $x_{2k-1} = 0$; при $n = 2k$ $x_{2k} = \frac{2}{(2k)^2} = \frac{1}{2k^2}$, $k \in N$), поэтому в качестве m можно взять любое отрицательное число или ноль (например, $m = -2$). В качестве M можно взять, например, единицу. Действительно, $x_{2k-1} = 0 < 1$ и $x_{2k} = \frac{1}{2k^2} < 1$ при любом $k \in N$. Следовательно, $-2 \leqslant x_n \leqslant 1$ при любом $n \in N$, а это означает ограниченность заданной последовательности.

2-й способ. Так как всякая сходящаяся последовательность ограничена (необходимое условие сходимости последовательности), то, установив, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2} = 0$ заключаем, что данная последовательность ограничена. 3. Последовательности, перечисленные в пунктах а), б), в), д), з). 4. Нет, например, последовательность (x_n), $x_n = (-1)^n$ ограничена, но она не имеет предела. 5. Последовательность (x_n) называется неограниченной, если для любого числа $L > 0$ существует хотя бы один номер n такой, что $|x_n| > L$. 6. а) ● Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n-1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-3n^2}{n^2+1}$;

б) ● Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2-1}$. 7. Вообще говоря, нет. Например, $x_n=(-1)^n$, $y=(-1)^{n+1}$. 8. а) ● Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n+n^2}{n^2}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+5n^3}{n^3+3}$; б) ● Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(15+\frac{1}{n^2}\right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-7}{n+6}$. 9. ▲ Предел последовательности (z_n), $z_n=cx_n$, где c — постоянная, существует: $\lim\limits_{n\to\infty}cx_n=c\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Полагая $c=-1$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n)=-\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-a$. 10. ▲ Так как $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(-y_n)=-b$ (см. решение предыдущей задачи). Применяя теорему о пределе суммы двух сходящихся последовательностей, получаем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+(-y_n))=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}(-y_n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to\infty}y_n=a-b.$$

11. а) Расходится; б) может как сходиться, так и расходиться. Например, 1) $a_n=1/n$, $b_n=(-1)^n$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$, т. е. последовательность a_nb_n сходится; 2 $a_n=(n+1)/n$, $b_n=(-1)^n$ — в этом случае предела последовательности a_nb_n не существует. 12. а) Нельзя; б) нельзя. Например, $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$, тогда $a_n+b_n=0$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$; $a_nb_n=(-1)^{2n+1}=-1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=-1$. 13. Нет. Например, $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$, $b_n=\frac{1-(-1)^n}{2}$; обе приведенные последовательности расходятся. 14. Последовательности, перечисленные в пунктах а), в), г), е), з), и). 15. ▲ Все члены последовательности (x_n), $x_n=\frac{5n}{n+2}$, положительны, следовательно, $x_n>0$, а так как $n/(n+2)<1$, то $5n/(n+2)<5\cdot1$. Таким образом, для любого $n\in N$ $0<x_n<5$, т. е. данная последовательность ограничена. Для доказательства второго утверждения рассмотрим разность

$$x_{n+1}-x_n=\frac{5(n+1)}{(n+1)+2}-\frac{5n}{n+2}=\frac{5\cdot2}{(n+3)(n+2)},$$

которая положительна при любом $n\in N$, следовательно, данная последовательность возрастает. 16. ● Покажите, что $1<x_n<1{,}5$ и что $x_{n+1}-x_n<0$. 17. Нет; например, если $x_n=1/n$, $y=(-1)^n n$, то последовательность $x_ny_n=(-1)^n$ предела не имеет. 18. 2. ▲ Рассмотрим две последовательности (x_n) и (y_n), $x_n=\frac{2n+1}{n+2}$ и $y_n=\frac{n-3}{n+1}$, и найдем их пределы: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}=$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(2+1/n)}{n(1+2/n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+1/n}{1+2/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+0}{1+0} = 2$ $\left(\text{так как } \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \text{ и } \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0\right)$. Аналогично находим предел последовательности y_n: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. Применяя далее теорему о пределе произведения двух сходящихся последовательностей, получаем ответ. 19. 0. ● Преобразуйте выражение $\dfrac{5n^3-4}{n^4+6}$ к виду $\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{5-4/n^3}{1+6/n^3}$ и примените теорему о пределе произведения бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность. 20. — 5/3. 21. 1/5. 22. 1/27. 23. — 3/4. 24. 0. ● Преобразуйте выражение $\dfrac{n \sin n}{n^2+1}$ к виду $\dfrac{1}{n} \dfrac{\sin n}{1+1/n^2}$ и покажите, что последовательность $\left(\dfrac{\sin n}{1+1/n^2}\right)$ ограничена. 25. 4. 26. 0. ● $\dfrac{n!}{(n+1)!-n!} = \dfrac{n!}{n!(n+1)-n!} = \dfrac{n!}{n!(n+1-1)} = \dfrac{1}{n}$. 27. 0. 28. 1. 29. 3/4. 30. 3/2. ● $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$. 31. 4/3. ● $1^2+2^2+\ldots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. 32. а) 1. ● $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$; б) 1/2; в) 1/2. ● Используйте результаты предыдущих задач а) и б) и примените теорему о пределе разности двух сходящихся последовательностей. 33. 1, если $|b|>1$; 0, если $|b|=1$; — 1, если $0<|b|<1$.

ГЛАВА VI

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1. а) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должны быть взаимно перпендикулярными; б) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должен быть острым; в) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должен быть тупым. 2. а) π; б) 1/10. 3. $x \in]-1; 5[$. ● Исходное неравенство равносильно неравенству $|x-2|\,|\vec{a}| < 3\,|\vec{a}|$ или $|x-2| < 3$. 4. $x \in]-3; -1] \cup [1; \infty[$. ● Решите систему неравенств

$$|x| \geqslant 1, \quad x+3>0.$$

5. $x=10/7$, $y=4/7$. 6. Б. ▲ По условию задачи, $\vec{a}+\vec{b}=\lambda\vec{c}$ и $\vec{b}+\vec{c}=\mu\vec{a}$, где λ, μ — некоторые числа, отличные от нуля. Исключая из этих уравнений $\vec{b}$, приходим к равенству $(\mu+1)\vec{a}=(\lambda+1)\vec{c}$, которое возможно лишь при $\mu=-1$ и $\lambda=-1$ (векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны). Следовательно, $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$ и $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. 7. $p=1$, $q=1$. ▲ Из коллинеарности векторов $p\vec{a}+q\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{a}+p\vec{b}+q\vec{c}$ следует, что $(p-\lambda)\vec{a}+(q-p\lambda)\vec{b}+(1-\lambda q)\vec{c}=0$. Последнее возможно лишь тогда, когда $p-\lambda=0$, $q-p\lambda=0$, $1-\lambda q=0$ $(\lambda \neq 0)$.

Решая систему этих уравнений, получаем ответ. 8. Верно, если $|\vec{a}| \geqslant |\vec{b}+\vec{c}|$. 9. $\overrightarrow{AO} = (\vec{a}+\vec{b})/3$. 10. $(2/3)(\vec{a}+\vec{b})$. ▲ Имеем: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \qquad (2)$$

Складывая уравнения (1) и (2), получаем

$$\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \text{ откуда } \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}).$$

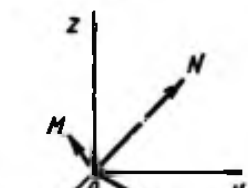
11. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. 12. $\dfrac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}|}$. 13. а) 13; б) $\sqrt{109}$. 14. $\{(-5/4;\ 8/5)\}$. 15. $\vec{p} = (-6;\ 8)$. 16. $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. ▲ Так как векторы $\vec{p}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны, то $\vec{p} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Последнее уравнение можно переписать в виде $\vec{p} = (3;\ 4) = \lambda(3;\ -1) + \mu(1;\ -2)$. Отсюда получаем систему уравнений относительно λ и μ:

$$3 = 3\lambda + \mu, \quad 4 = -\lambda - 2\mu,$$

решая которую получаем: $\lambda = 2$, $\mu = -3$; следовательно, $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. 17. $\{(2;\ 9);\ (7;\ 0)\}$. ● Рассмотрите отдельно случаи $(BC) \parallel (AD)$ и $(AB) \parallel (CD)$. 18. $(1,5;\ 1;\ -2)$. 19. ● Покажите, что $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$. 20. $\sqrt{18}$. 21. в) $(4\sqrt{2};\ -2;\ 8)$, $(-4\sqrt{2};\ 2;\ -8)$; б) $(-24;\ 32;\ 30)$; в) $(-6;\ 8;\ 24)$. 22. $M(-1;\ 0;\ 0)$. ● Используйте равенство $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, где $\overrightarrow{MA} = (1-x;\ 2;\ 3)$ и $\overrightarrow{MB} = (-3-x;\ 3;\ 2)$. 23. $\sqrt{51}/3$. ● $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + (1/3)(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$. 24. Да. 25. $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$. ● Представьте вектор $\vec{d}$ в виде $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$ и из системы уравнений

$$3\lambda - \mu + 2\nu = 11, \quad -2\lambda + \mu + \nu = -6, \quad \lambda - 2\mu - 3\nu = 5$$

найдите коэффициенты λ, μ, ν. 26. $\frac{2}{5}\overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$. ● $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CB_1}$. 27. $\frac{4}{13}\vec{i} + \frac{3}{13}\vec{j} + \frac{12}{13}\vec{k}$. ▲ Имеем: $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$; следовательно, $|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = 13$ и $\vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{4}{13}\vec{i} + \frac{3}{13}\vec{j} + \frac{12}{13}\vec{k}$. 28. 3 : 1. ● Докажите, что искомое отношение равно отношению длин векторов $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{EM_1}$ (E — середина отрезка BD). 29. 5. ▲ Введем прямоугольный базис $Oxyz$, совместив O с точкой приложения сил (см. рис.), причем $\overrightarrow{OM} \in Oxz$, $\overrightarrow{ON} \in Oyz$ и $\overrightarrow{OP} \in Oxy$. Пусть $|\overrightarrow{OM}| = 1$, $|\overrightarrow{ON}| = 2$ и $|\overrightarrow{OP}| = 3$, тогда $\overrightarrow{OM} = (1/\sqrt{2};\ 0;\ 1/\sqrt{2})$, $\overrightarrow{ON} = (0;\ \sqrt{2};\ \sqrt{2})$ и $\overrightarrow{OP} = (3/\sqrt{2};\ 3/\sqrt{2};\ 0)$. Сумма этих векторов



есть вектор равнодействующей этих сил $\vec{p}=(4/\sqrt{2};\ 5/\sqrt{2};\ 3/\sqrt{2})$; $|\vec{p}|=\sqrt{\frac{16+25+9}{2}}=5$. 30. $\alpha^2+\beta^2=1$.

§ 2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. $3\pi/4$. 2. 4. 3. $3/\sqrt{21}$. ▲ Имеем: $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=$ $=|\vec{a}+\vec{b}|\,|\vec{a}-\vec{b}|\cos\varphi$; отсюда $\cos\varphi=\frac{|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}}=$ $=\frac{2^2-1}{\sqrt{2^2+1^2+2\cdot2\cdot1\cdot\cos60^\circ}\sqrt{2^2+1^2-2\cdot2\cdot1\cdot\cos60^\circ}}=\frac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}=$ $=\frac{3}{\sqrt{21}}$. 4. $-4/5$. ▲ Решая систему уравнений относительно $\vec{p}$ и $\vec{q}$, находим: $\vec{p}=(1/3)(2\vec{a}-\vec{b})=(1/3;\ 1)$, $\vec{q}=(1/3)(2\vec{b}-\vec{a})=$ $=(1/3;\ -1)$; так как $\vec{p}\vec{q}=|\vec{p}|\,|\vec{q}|\cos(\widehat{\vec{p},\vec{q}})$, то $\cos(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=$ $=(1/9-1)/(\sqrt{10/9})^2=-4/5$. 5. ● Докажите, что $\vec{a}\vec{p}=0$. 6. -295. ▲ Возводя равенство $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ в квадрат, получаем $|\vec{a}|^2+$ $+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a})=0$. Отсюда имеем: $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}=$ $=-(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)/2=-(13^2+14^2+15^2)/2=-295$. 7. $\arccos(1/3)$.

● Определите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. 8. $\pi/4$. 9. $\arccos(5/\sqrt{39})$. ● Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. 10. $\alpha=\arccos\frac{2z-5}{3\sqrt{(z-3)^2+2}}$. 11. 9/2. ● $S_{ABC}=$ $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|\sin\widehat{A}$, $\sin\widehat{A}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{A}}=\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}\right)^2}$.

12. $\arccos\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$. ● Покажите, что искомый угол равен углу между векторами $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$. 13. $\arccos(63/\sqrt{6441})$. 14. $|\overrightarrow{AC}|=5$; $O(5/2;\ 1;\ 1)$. 15. $(1;\ 1/2;\ -1/2)$. ▲ Пусть $\vec{b}=$ $=(x,\ y,\ z)$, тогда из условия коллинеарности имеем $x/2=y/1=$ $=-z/1=t$ или $x=2t$, $y=t$, $z=-t$. Подставляя последнее равенство в скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}=3$, находим $t=1/2$. 16. $(-3;\ 3;\ 3)$. 17. $(4/\sqrt{3};\ -1/\sqrt{3};\ -2/\sqrt{3})$. 18. $(2;\ -3;\ 0)$. 19. $(1;\ 0;\ 1)$; $(-1/3;\ 4/3;\ -1/3)$. ▲ Пусть $\vec{c}=(x;\ y;\ z)$, тогда

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (1)$$

По условию, углы φ между векторами одинаковые, поэтому

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad\frac{\vec{a}\vec{c}}{|\vec{a}|\,|\vec{c}|}=\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

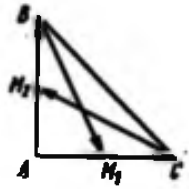
и

$$\frac{\vec{b}\vec{c}}{|\vec{b}|\,|\vec{c}|}=\frac{y+z}{2}=\frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Решив систему уравнений (1), (2), (3), получим ответ. 20.5. 21. (2; −2; −2). 22. $x \in]-\infty; 0[$. ● Найдите значения x, при которых одновременно выполняются неравенства $\vec{a}\vec{b} > 0$, $\vec{b}\vec{c} < 0$, где $\vec{c} = (0; 1; 0)$. 23. ● Найдите $\vec{MQ} \cdot \vec{NP}$, где $\vec{MQ} = \vec{MP} + \vec{PC}$, $\vec{NP} = \vec{NQ} + \vec{QP}$. 24. $\arccos(-4/5)$. ▲ В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC (см. рис.) имеем $|\vec{AC}| = |\vec{AB}|$, $[BM_1]$ и $[CM_2]$ — медианы,

$$\vec{BM_1} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB},$$

$$\vec{CM_2} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC}.$$

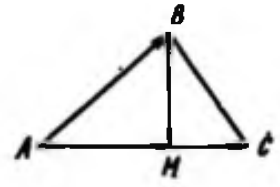


Перемножая два последних векторных равенства и учитывая, что $\vec{AB} \perp \vec{AC}$, находим

$$\vec{BM_1} \cdot \vec{CM_2} = \frac{5}{4}|\vec{AB}|^2 \cos\varphi = -(\vec{AC}^2 + \vec{AB}^2)/2 = -|\vec{AB}|^2.$$

25. $\vec{BM} = \dfrac{\vec{b}\vec{c}}{|\vec{c}|^2} \cdot \vec{c} - \vec{b}$. ▲ Имеем (см. рис.)

$$\vec{BM} = \vec{AM} - \vec{b}, \qquad (1)$$



где $\vec{AM} = \gamma\vec{c}$ (γ — некоторое действительное число). Так как вектор $\vec{BM}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$, то $\vec{BM} \cdot \vec{c} = 0$. Следовательно, $\gamma\vec{c}^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, т. е. $\gamma = \vec{b} \cdot \vec{c}\,/\,|\vec{c}|^2$. Подставив найденное γ в уравнение (1), получим ответ. 26. (−20/7; −30/7; 10/7). ● Воспользуйтесь решением задачи 25. 27. $\arccos(2/\sqrt{29})$. ● Используя результат задачи 25, находим:

$$\vec{BM_1} = \left(\frac{14}{9}; +\frac{1}{9}; -\frac{8}{9}\right), \quad \vec{DM_2} = (2; -2; 1);$$

$$\cos\psi = \frac{\vec{BM_1} \cdot \vec{DM_2}}{|\vec{BM_1}|\,|\vec{DM_2}|}.$$

28. $2x + 2y + 3z - 6 = 0$. ▲ Уравнение плоскости в общем виде имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (1)$$

Подставляя поочередно координаты точек M_1, M_2, M_3 в уравнение (1), получаем систему уравнений

$$a - b + 2c = -d, \quad 3b = -d, \quad 2a + b = -d,$$

решив которую найдем $a = -d/3$, $b = -d/3$, $c = -d/2$. При этих значениях коэффициентов a, b и c уравнение (1) примет вид $-d(2x + 2y + 3z - 6) = 0$. Сокращая на $(-d)$ $(d \neq 0)$, получим

искомое уравнение. 29. $x+z-4=0$. ▲ Пусть $\vec{n}=(a; b; c)$ — вектор, нормальный к плоскости α, проходящей через точку A (4; 0; 0). Так как плоскость α параллельна оси Oy, то вектор $\vec{n}$ перпендикулярен любому вектору, параллельному оси Oy, например вектору $\vec{j}=(0; 1; 0)$. Отсюда следует, что $\vec{n}\vec{j}=b=0$, т. е. уравнение плоскости α будет иметь вид $a(x-4)+cz=0$ или $a_1(x-4)+z=0$, где $a_1=a/c$. Подставляя координаты точки B в последнее уравнение, получаем $a_1(0-4)+4=0$, $a_1=1$, откуда $x+z-4=0$. 30. -1. ▲ Если $D\in(ABC)$, то векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ компланарны и поэтому $\vec{AD}=\lambda\vec{AB}+\mu\vec{AC}$, где хотя бы один из коэффициентов (λ, μ) отличен от нуля. В координатной форме это уравнение можно переписать так: $(k-1; 2; 2)=\lambda(-2; 3; 1)+\mu(0; 2; -2)$, отсюда получаем систему уравнений

$$-2\lambda=k-1,\quad 3\lambda+2\mu=2,\quad \lambda-2\mu=2,$$

из которой находим $\lambda=1$ и $k=-2\lambda+1=-2+1=-1$. *Замечание.* Задачу можно решить также, написав предварительно уравнение плоскости (ABC) (см. решение задачи 28) и подставив в это уравнение координаты точки D. 31. а) См. решение задачи 30; б) $\pi/2$; в) $21\sqrt{10}/2$. ● $S_{ABCD}=(1/2)\,|\vec{AC}|\,|\vec{BD}|$. 32. $\pi/3$. ● Для нахождения угла между плоскостями (ABC) и (ABD) определите угол между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, нормальными к плоскостям (ABC) и (ABD). 33. а) $A(1; 2; 0)$; $B(0; 0; 2)$. ▲ Полагая в системе уравнений

$$2x+3y+4z-8=0,\quad 4x+y+3z-6=0 \qquad (1)$$

$z=0$, найдем абсциссу и ординату точки A пересечения прямой p с плоскостью xOy, т. е. найдем $x=1$, $y=2$. Аналогично находятся координаты точки B (в системе (1) надо положить $x=0$);

б) $\arcsin(2/3)$. ● Величину искомого угла можно найти из равенства $\cos\varphi=\dfrac{\vec{BA}\vec{n}}{|\vec{BA}|\,|\vec{n}|}$, где $\vec{BA}=(1; 2; -2)$ и $\vec{n}=(0; 1; 0)$, — вектор, нормальный к плоскости xOz (φ — угол между векторами $\vec{BA}$ и $\vec{n}$). 34. а) $E(12; 0; 3)$; $F_1(0; 6; 12)$; $G(6; 12; 0)$; б) $7x+5y+6z-102=0$; в) $3\sqrt{10/11}$. ● Уравнение прямой, проходящей через точку B_1 и перпендикулярной плоскости (EF_1G), имеет вид $\dfrac{x-0}{7}=\dfrac{y-0}{5}=\dfrac{z-12}{6}$ (вектор $(x; y; z-12)$ коллинеарен вектору $(7; 5; 6)$). Определите координаты точки M пересечения этой прямой с плоскостью (EF_1G) и найдите расстояние $|B_1M|$ по формуле $|B_1M|=\sqrt{(x_{B_1}-x_M)^2+(y_{B_1}-y_M)^2+(z_{B_1}-z_M)^2}$.

ГЛАВА VII

ПЛАНИМЕТРИЯ

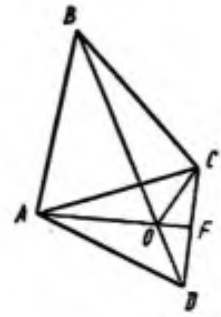
§ 1. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. ▲ 1) $C \in [AB]$. Пусть $C \in [AM]$, тогда

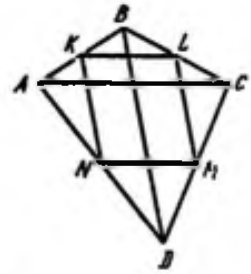
$$|AC| + |CM| = |AM| \text{ и } |BC| = |CM| + |MB| = |CM| + |AM|.$$

Исключая из этих равенств $|AM|$, найдем $|CM| = |AC| - |BC|/2$. Аналогично рассматривается случай, когда $C \in [MB]$; 2) $C \notin [AB]$. Пусть $C \in [BD)$, где $D \in (AB)$, тогда $|MC| = |MB| + |BC|$ и $|AC| = |AM| + |MC| = |MB| + |MC|$. Исключая из этих равенств $|MB|$, получим $|MC| = (|AC| + |BC|)/2$. Случай, когда $C \in |A, E)$, где $E \in (AB)$ рассматривается аналогично. 2. ● Используйте при доказательстве свойство вертикальных углов.

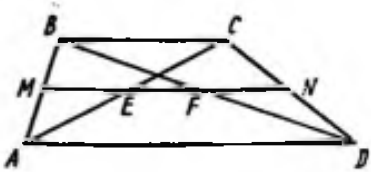
3. ▲ Проведем $(AF) \perp (CD)$ (см. рис.). Прямая (AF) является осью симметрии треугольника ACD и пересекает $[BD]$ в точке O. Отсюда следует, что $|OC| = |OD|$. Из неравенства треугольника получаем $|OB| + |OC| \geq |BC|$, но $|OB| + |OC| = |OB| + |OD| = |BD|$ и поэтому $|BD| \geq |BC|$. 4. ● Используйте свойство накрест лежащих углов при параллельных прямых.

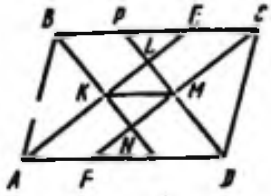


5. ▲ Отрезки $[KL]$ и $[MN]$ (см. рис.) являются средними линиями треугольников ABC и ADC; следовательно, $[KL] \parallel [AC] \parallel [MN]$. Аналогично можно доказать, что $[KN] \parallel [LM]$, а это означает, что $KLMN$ — параллелограмм.



6. ▲ Проведем среднюю линию $[MN]$ трапеции $ABCD$ (см. рис.). Она пересечет диагонали трапеции AC и BD в точках E и F, которые являются серединами соответствующих диагоналей (это следует из теоремы Фалеса для угла BAC и BDC). Следовательно, $[EF] \parallel [AD]$. Найдем длину отрезка $[EF]$; $[MF]$ — средняя линия $\triangle ABD$, $[ME]$ — средняя линия $\triangle ABC$, поэтому из уравнения $|MF| = |ME| + |EF|$, или $a/2 = |EF| + b/2$, следует, что $|EF| = (a - b)/2$.

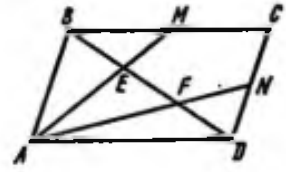




7. ▲ Пусть (CF) — биссектриса угла BCD, (DP) — биссектриса угла ADC (см. рис.). Так как $\widehat{BCD} + \widehat{ADC} = \pi$, то $\widehat{FCD} + \widehat{MDC} = \pi/2$, а отсюда следует, что $\widehat{CMD} = \pi/2$ и поэтому $\widehat{LMN} = \pi/2$. (Углы CMD и LMN — вертикальные.) Аналогично доказывается, что $\angle LKN$ — прямой, а поскольку $(AE) \parallel (CF)$, заключаем, что $KLMN$ — прямоугольник.

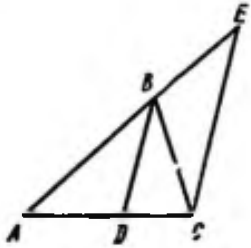
Найдем теперь длину диагонали $[KM]$. Треугольники ABE и CDF конгруэнтны ($|AB| = |CD|$, $\hat{B} = \hat{D}$, $|BE| = |DF|$; последнее устанавливаем из того, что биссектрисы BK и DM рассматриваемых треугольников являются высотами этих треугольников, а это означает, что $|AB| = |BE| = |CD| = |DF|$). Из конгруэнтности этих треугольников следует, что $|KE| = |MC|$ и $KECM$ — параллелограмм. Следовательно, $|KM| = |EC| = |BC| - |BE| = |BC| - |AB|$.

8. ▲ Пусть E и F — точки пересечения прямых (AM) и (AN) с диагональю BD (см. рис.). Из подобия треугольников AFB и DFN (углы AFB и DFN — вертикальные $\widehat{FND} = \widehat{BAF}$) следует, что $\frac{DF}{BF} = \frac{|DN|}{|AB|} = \frac{1}{2}$. Таким образом, $|DF| = (1/3)|BD|$.

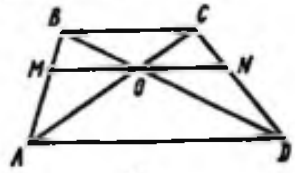


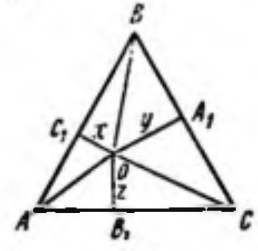
Аналогично (рассмотрите подобие треугольников BEM и AED) находим, что $|BE| = (1/3)|BD|$, следовательно, и $|EF| = (1/3)|BD|$, т. е. $|BE| = |EF| = |FD|$.

9. ▲ Проведем $(CE) \parallel (BD)$ (BD — биссектриса), $E = (AB) \cap (CE)$ (см. рис.). Отсюда получаем, что $|BE| = |BC|$ ($\widehat{ABD} = \widehat{BEC} = \widehat{DBC} = \widehat{BCE}$ и поэтому $\triangle CBE$ — равнобедренный). Далее имеем $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|CD|}$ или $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|CD|}$.



10. ▲ Из подобия треугольников ABD и MBO (см. рис.) имеем: $\frac{|OM|}{|AD|} = \frac{|OB|}{|DB|}$, а из подобия треугольников ACD и OCN — $\frac{|ON|}{|AD|} = \frac{|OC|}{|AC|}$. Но $\frac{|OC|}{|AC|} = \frac{|OB|}{|DB|}$, так как $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ $\left(\frac{|AC|}{|OC|} = 1 + \frac{|AO|}{|OC|}, \frac{|DB|}{|OB|} = 1 + \frac{OD|}{|OB}\right)$, поэтому $\frac{|OM|}{|AD|} = \frac{|ON|}{|AD|}$ или $|OM| = |ON|$.

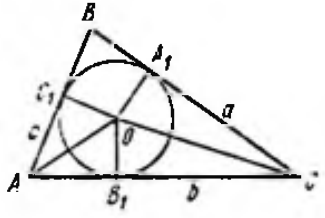




11. ▲ Пусть O — произвольная точка, лежащая внутри правильного треугольника ABC (см. рис.), и пусть $|OC_1| = x$,

$|OA_1|=x$, $|OB_1|=y$, $|OC_1|=z$, $|AB|=a$. Найдем площадь $\triangle ABC$ как сумму площадей треугольников AOB, BOC, AOC: $S_{ABC}=\frac{1}{2}xa+\frac{1}{2}ya+\frac{1}{2}za$; с другой стороны $S_{ABC}=a^2\sqrt{3}/4$. Имеем равенство $a^2\sqrt{3}/4=\frac{1}{2}a(x+y+z)$ или $x+y+z=a\sqrt{3}/2=h$, где h — длина высоты треугольника ABC.

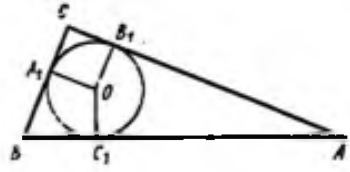
12. ▲ Пусть $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$ (см. рис.), тогда $S=S_{ABC}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{AOC}=\frac{1}{2}OA_1\cdot a+\frac{1}{2}OB_1\cdot b+\frac{1}{2}OC_1\cdot c$; а так как $OC_1=OA_1=OB_1=r$, то $S=r\frac{a+b+c}{2}=rp$, откуда $r=S/p$.



13. ▲ Площадь S треугольника ABC находим по формуле $S=(1/2)ab\sin\hat{C}$, где $\hat{C}$ — величина угла, противолежащего стороне AB. Проведем диаметр AC_1 окружности, описанной около треугольника ABC. Вписанные в эту окружность углы BC_1A и ACB таковы, что $\sin\hat{C}=\sin\hat{C}_1$, поэтому $AB=c=2R\sin\hat{C}$. Следовательно, $\sin\hat{C}=\frac{c}{2R}$ и $S=\frac{1}{2}ab\frac{c}{2R}$, откуда следует, что $R=\frac{abc}{4S}$.

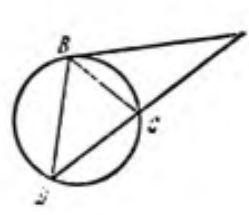
14. ▲ Используя свойство отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки, имеем: $A_1C=CB_1=r$ (A_1CB_1O — квадрат), $|A_1B|=|BC_1|$ и $|B_1A|=|AC_1|$ (см. рис). Отсюда получаем, что $|BC|=|A_1B|+r$, $|AC|=|AB_1|+r$ (r — радиус вписанного круга). Складывая эти равенства, получаем

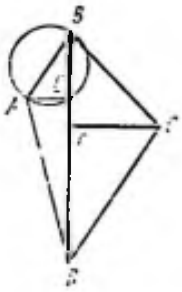
$$|BC|+|AC|=2r+|A_1B|+|AB_1|=2r+|BC_1|+|C_1A|=2r+|AB|,$$



а поскольку в прямоугольном треугольнике длина гипотенузы равна диаметру описанной около этого треугольника окружности, то $BC+AC=2r+2R$.

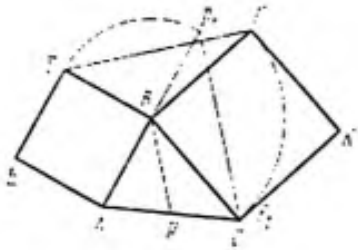
15. ▲ Соединим отрезками точку B с точками C и D (см. рис.). Треугольники ABC и ABD подобны ($\widehat{ABC}=\widehat{ADB}$, угол A — общий), поэтому $\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|AD|}{|AB|}$, откуда следует, что $|AB|^2=|AD|\cdot|AC|$.





16. ▲ Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник (см. рис.). Проведем перпендикуляры из вершин A и C к диагонали BD. Мы получили таким образом четыре прямоугольных треугольника AEB, BFC, CFD, AED.

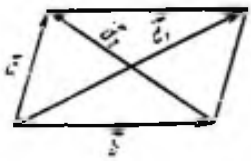
Все точки треугольника AEB принадлежат кругу, построенному на стороне AB как на диаметре ($\angle E = \pi/2$, этот угол вписанный). Проводя аналогичные рассуждения для трех других треугольников, приходим к выводу, что любая точка четырехугольника принадлежит хотя бы одному из кругов, диаметрами которых являются стороны четырехугольника $ABCD$.



17. ● Докажите, что $\widehat{MPN} = \widehat{MPH}$, $\widehat{PNQ} = \widehat{PMQ}$.

18. ▲ Поворот $\triangle DBF$ вокруг точки B на угол 90° (см. рис.) переводит точку D в точку D_1, а точку F в точку F_1, совпадающую с точкой C. При этом $|D_1C| = |DF|$, а $D_1 \in (AB)$. Так как $|AB| = |BD| = |BD_1|$ (как длины сторон квадрата) и $|AP| = |PC|$ (по условию), то $[BP]$ является средней линией треугольника AD_1C, а это означает, что $|BP| = \frac{1}{2}|D_1C| = \frac{1}{2}|DF|$, или $|DF| = 2|BP|$.

19. ● Докажите, что при гомотетии с центром $O = [AC] \cap [BD]$ и коэффициентом гомотетии $k = -\frac{|CD|}{|AB|}$ квадрат, построенный на $[AB]$, перейдет в квадрат, построенный на $[CD]$.

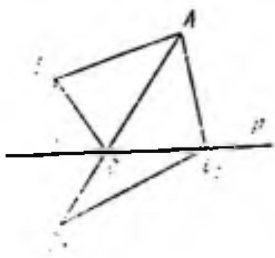


20. ▲ Так как $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b}$ (см. рис.), то после возведения этих равенств в квадрат и сложения их получаем

$$|\vec{d}_1|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\vec{b},$$
$$|\vec{d}_2|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b};$$
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

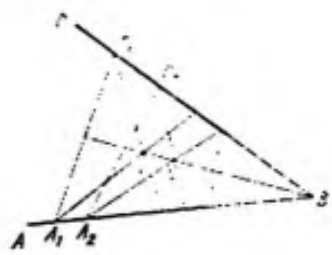
§ 2. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

1. ● Постройте параллелограмм, в котором точка A была бы точкой пересечения диагоналей. 2. ● Постройте треугольник со сторонами a, b, $2m$, где a, b, m — длины данных сторон и медианы.

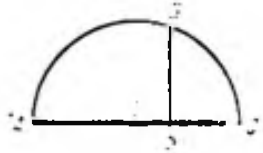


3. ▲ Построив точку B_1, (см. рис.), симметричную точке B относительно p, и соединив ее прямой с точкой A, получим точку $C \in p \cap (AB_1)$, которая удовлетворяет требованию задачи, так как неравенство $|BC| + |AC| = |B_1C| + |AC| = |AB_1| < |B_1C_1| + |AC_1|$ выполняется для любой другой точки $C_1 \in p$.

4. ▲ Возьмем на сторонах угла ABC точки A_1 и C_1 (см. рис.) и построим биссектрисы углов A_1 и C_1 треугольника A_1BC_1, которые пересекутся в точке O_1. Так как в треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке, то точка O_1 принадлежит биссектрисе угла B.



Аналогично в треугольнике A_2BC_2 находим точку O_2 — точку пересечения биссектрис. Прямая (O_1O_2) — искомая, так как она содержит биссектрису угла B. 5. ● Постройте треугольник A_1BC_1 ($A_1 \in (AB)$, $C_1 \in (BC)$), в котором точка D является точкой пересечения высот. 6. ● Постройте треугольник по трем сторонам, длины которых составляют $^2/_3$ длин данных медиан, и докажите, что удвоенные длины медиан полученного треугольника являются сторонами искомого треугольника.

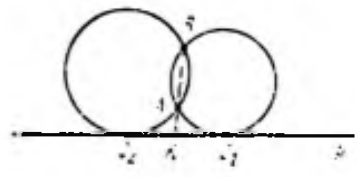


7. а) ● Докажите, что если $|AB| = a$, $|BC| = b$ (см. рис.) и радиус полукруга $|AO| = (a+b)/2$, то $|DB| = \sqrt{ab}$ ($[DB] \perp [AC]$). б) ● Постройте отрезки $c = |a-b|$ и $d = \sqrt{ab}$, а затем отрезок $x = \sqrt{a^2-ab+b^2} = \sqrt{(a-b)^2+ab} = \sqrt{c^2+d^2}$ (как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами длиной c и d). в) ● Постройте отрезки $c = |a-b|$ и $d = b\sqrt{3}$ и затем искомый отрезок $x = \sqrt{c^2+d^2}$. 8. ● По данным углам A и B постройте произвольный треугольник ABC, найдите его периметр p и докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$, гомотетичный треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии $k = p_1/p$, где p_1 — периметр искомого треугольника с центром в вершине A (или в вершинах B или C), удовлетворяет всем условиям задачи. 9. ● Докажите, что отношение радиусов описанных окружностей около подобных треугольников равно отношению сходственных сторон. 10. а) ● На отрезке $[OA]$ как на диаметре постройте окружность и докажите, что прямые, проходящие через точку A и точки пересечения окружностей, являются касательными к данной окружности. б) ● Для нахождения отрезка $|AC|$ используйте уравнение $|AK|^2 = |AC| \cdot |AB|$, где $[AK]$ — отрезок касательной, проведенной из точки A к данной окружности (K — точка касания) (см. задачу 15 § 1). 11. ● Найдите радиусы окружностей R_1, R_2, R_3 из системы уравнений

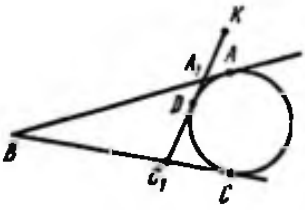
$$R_1 + R_2 = a, \quad R_2 + R_3 = b, \quad R_3 + R_1 = c,$$

где a, b, c — длины сторон данного треугольника.

12. а) ▲ Проведем прямую (AB) (см. рис.); $K = (AB) \cap p$. Построив из уравнения $|KC|^2 = |KB| \cdot |AK|$ отрезок $|KC|$ (см. решение задачи 10б этого параграфа) и отложив его по обе стороны от точки K, получим две точки C_1 и C_2. Окружности, про-



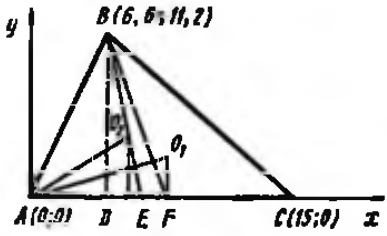
ходящие через точки A, B, C_1 и A, B, C_2 — искомые. *Замечание.* Если $[AB] \parallel p$, то существует только одна окружность, удовлетворяющая требованиям задачи. б) ● Докажите, что этим свойством обладают следующие точки: точка касания окружности меньшего радиуса, если $[AB] \nparallel p$; точки C_1 и C_2 касания двух окружностей одинакового радиуса, если $|AB| \perp p$; точка касания единственной окружности, если $[AB] \parallel p$.



13. ● На сторонах угла ABC (см. рис.) отложите отрезки $|AB| = |BC| = p/2$ (p — заданный периметр), впишите в данный угол окружность, касающуюся сторон угла в точках A и B, и из заданной точки K проведите касательную к этой окружности. Треугольник A_1BC_1 — искомый (докажите это, воспользовавшись свойством отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки).

§ 3. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

1. а) $\hat{B} = \arccos(5/13) = \arcsin(12/13)$. ● Используйте теорему косинусов; б) 84 см². ● Примените формулу Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = 0{,}5(a+b+c)$; в) $|BD| = h_b = 11{,}2$ см; г) 4 см. ● См. задачу 12 § 1 гл. VII; д) 65/8 см. ● См. задачу 13 § 1 гл. VII; е) $28\sqrt{13}/9$ см. ▲ $S_{ABC} = S_{ABE} + S_{CBE} = S$; $S = \frac{1}{2} ac \sin\hat{B} = \frac{1}{2} cl_b \sin\frac{\hat{B}}{2} + \frac{1}{2} al_b \sin\frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow l_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\hat{B}}{2}$, $\left(\cos\hat{B} + 1 = 2\cos^2\frac{\hat{B}}{2}\right)$; ж) $\frac{\sqrt{505}}{2}$ см. ▲ Введем прямоугольную систему координат: начало координат совместим с вершиной A (см. рис.), а ось абсцисс выберем так, чтобы сторона AC принадлежала этой оси. В этой системе координат вершины A и C будут иметь координаты $A(0, 0)$, $C(15, 0)$. Найдем координаты точки B. Ее ордината y_B численно равна высоте $h_b = 11{,}2$ см, а абсциссу определим из соотношения $h_b^2 + |AD|^2 = c^2$. $|AD| = x_B = 6{,}6$; $F(7{,}5; 0)$. Теперь имеем

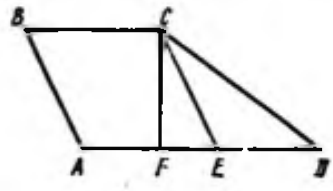


$$|BF| = m_b = \sqrt{(x_F - x_B)^2 + (y_F - y_B)^2} = \sqrt{505}/2;$$

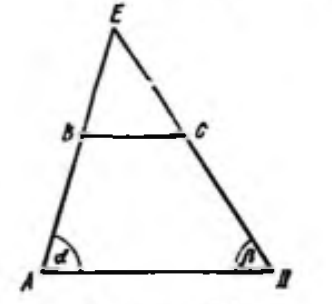
з) $\sqrt{65}/8$ см. ▲ Искомое расстояние d вычисляется по формуле $d = \sqrt{(x_{O_1} - x_{O_2})^2 + (y_{O_1} - y_{O_2})^2}$, где x_{O_1}, y_{O_1} — координаты центра описанной окружности и x_{O_2}, y_{O_2} — координаты центра вписанной окружности. Определим координаты $x_{O_1} = b/2 = 7{,}5$; $y_{O_1} = r = 4$;

$$y_{O_2} = \sqrt{R^2 - (b/2)^2} = 25/8; \quad x_{O_2} = r\operatorname{ctg}(\hat{A}/2) = 7 \quad (\cos\hat{A} = 33/65).$$

Теперь легко найти d. и) $\sqrt{265}/24$. ▲ Так как координаты центра описанной окружности известны: $O_1(7{,}5;\ 25/8)$, то для нахождения $|GO_1|$ необходимо определить координаты точки G. Найдем их. Векторы $\overrightarrow{BF}$ и $\overrightarrow{BG}$ коллинеарны, т. е. $\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BF}$, причем $\lambda=2/3$. Имеем: $\overrightarrow{BF}=(0{,}9;\ -11{,}2)$ и $\overrightarrow{BG}=(0{,}6;\ -22{,}4/3)$. Пусть x_G и y_G — абсцисса и ордината точки G соответственно. Тогда $x_G-x_B=x_G-6{,}6=0{,}6$ и $y_G-y_B=y_G-11{,}2=-22{,}4/3$, откуда $x_G=7{,}2$ и $y_G-11{,}2/3=56/15$. По формуле $\sqrt{(x_G-x_{O_1})^2-(y_G-y_{O_1})^2}$ найдем расстояние $|GO_1|$. 2. $a^2(\sqrt{3}-1)/4$. 3. 4 см. 4. 5,2 м. 5. $\pi/4$ или $3\pi/4$. 6. $a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})/2$. 7. 10 см, 10 см, 12 см. 8. 1. 9. 1 дм. 10. $\arccos(2/3)$, $\arccos(2/3)$, $\pi-2\arccos(2/3)$. 11. 13 см, 15 см. 12. 3; 4; 5. 13. 6. 14. Rr. ▲ Пусть a, b — длины катетов, c — длина гипотенузы, тогда $p=(a+b+c)/2$ и легко заметить, что $a+b+c=2R$, следовательно, $p=R$; а так как $S=pr$, то $S=Rr$. 15. 27 дм, 64 дм. 16. $\sqrt{7}$. 17. 10 см, 10 см, 1 см. 18. $(\sqrt{3}+\sqrt{15})/4$ см^2. 19. $3S/4$. ▲ Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC; $[AN]$, $[BF]$, $[CM]$ — его медианы. На луче $[BF]$ за точку F отложим точку P так, чтобы $|PF|=|OF|$, и соединим точки A и P отрезком прямой. Длины сторон треугольника AOP равны соответственно $2|AN|/3$, $2|CM|/3$, $2|BF|/3$. Поэтому искомую площадь дает отношение $S/3:(2/3)^2$. 20. $bc\sqrt{2}/(b+c)$. 21. $3\sqrt{7}/2$ см, 1,5 см, 3,5 см. 22. $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/2$. 23. $\sqrt{b(b+c)}$. 24. $a^2b^2/(2a^2-b^2)$. 25. $\pi/2+\arccos\sqrt{5/8}$. 26. 7 см, 15 см. 27. 6 см, 9 см, $3\sqrt{34}/2$ см.



28. $(1/2)(a-b)^2\sin\alpha$. 29. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 30. 216 см^2. 31. 2 см. 32. 15 см. ● В трапеции $ABCD$ (см. рис.) проведите $(CE)\parallel(AB)$ и найдите длину высоты CP треугольника ECD.

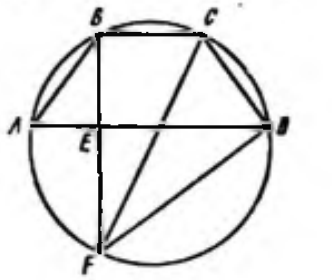


33. $\frac{1}{2}(a^2-b^2)\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

● Продолжите боковые стороны трапеции $ABCD$ до пересечения в точке E (см. рис.) и найдите площадь трапеции как разность площадей треугольников AED и BEC.

34. 2 см, 5 см, 5 см, 8 см.

35. $(9\sqrt{3}/4)r^2$. ● Докажите, что четырехугольник $ABEK$ — трапеция.



36. $\dfrac{18\sqrt{5}}{5}$ см.

37. 85/8 см. ▲ Проведем из вершины B перпендикуляр к основанию AD до пересечения с окружностью в точке F (см. рис.). Отрезок $[CF]$ — диаметр описанной вокруг трапеции

$ABCD$ окружности (угол $\widehat{FBC}=\pi/2$ является вписанным). Из подобия треугольников AEB и FED следует, что

$$\frac{|BE|}{|ED|}=\frac{|AE|}{|EF|} \text{ или } |EF|=|AE|\frac{|ED|}{|BE|}=$$

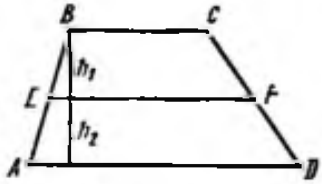
$$=\frac{21-9}{2}\cdot\frac{1}{8}\left(21-\frac{21-9}{2}\right)=\frac{45}{4}.$$

Далее из прямоугольного треугольника FBC находим $|FC|$ и R

$$|FC|=\sqrt{|BF|^2+|BC|^2}=\sqrt{\left(8+\frac{45}{4}\right)^2+9^2}=$$

$$=\frac{85}{4} \text{ и } R=\frac{|CF|}{2}=\frac{85}{8} \text{ см}.$$

38. $5\pi/12$, $7\pi/12$. ● Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобочная и что длина ее средней линии равна $|AD|\sqrt{3}/2$. 39. $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$. ▲ Пусть $BC|=b$, $AD|=a$, $|EF|=x$, а высоты трапеций $EBCF$ и $AEFD$ — h_1 и h_2 соответственно (см. рис.). По условию задачи, $S_{EBCF}=S_{ABCD}/2$ и $S_{AEFD}=S_{ABCD}/2$ или $h_1(x+b)/2=(a+b)\times$ $\times(h_1+h_2)/4$ и $h_2(x+a)/2=(a+b)(h_1+h_2)/4$. Преобразуем эти уравнения:

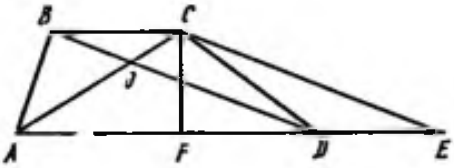


$$\frac{2h_1}{h_1+h_2}=\frac{a+b}{x+b}, \quad (1)$$

$$\frac{2h_2}{h_1+h_2}=\frac{a+b}{x+a}. \quad (2)$$

Сложив уравнения (1) и (2), получим уравнение $2=(a+b)\times$ $\times\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}\right)$, решив которое найдем ответ. 40. $((a+b)/a)^2$.

▲ Проведем $[CE]\parallel[BD]$ (см. рис.). Площади треугольников ABC и CDE равны, так как $|BC|=|DE|=b$, а высоты этих треугольников $[CF]$ равны высоте трапеции. Следовательно, трапеция $ABCD$ равновелика треугольнику ACE. Треугольники ACE и AOD подобны, поэтому



$$\frac{S_{ACE}}{S_{AOD}}=\frac{S_{ABCD}}{S_{AOD}}=\frac{|AE|^2}{|AD|^2}=$$

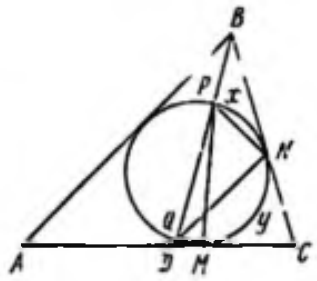
$$=\frac{(a+b)^2}{a^2}.$$

41. $3r$. 42. $R^2\arcsin\frac{r}{R-r}$. ● Определите величину угла сектора α и затем вычислите площадь сектора S по формуле $S=R^2\alpha/2$.

43. $5R^2(2\sqrt{3}+5\pi)/6$. 44. $1/3$. 45. $(Rr/(R+2r)^2)\left[3R-2r\pm\right.$ $\left.\pm\sqrt{8(R^2-2Rr)}\right]$.

46. $\sqrt{2-\sqrt{3}}/\sqrt{3}$. ▲ Так как BD является биссектрисой угла ABC, то $[PQ]$ — диаметр вписанной окружности и треугольники PQM и

PQN — прямоугольные (см. рис.) $(\widehat{PNQ}=\widehat{PMQ}=\pi/2)$. Пусть дуга PN содержит x рад, NMQ — y рад. Тогда $\widehat{DBC}=(y-x)/2=\pi/6$, а $y+x=\pi$; отсюда находим $x=\pi/3$, $y=2\pi/3$ и $\widehat{PQN}=\pi/6$, а $\widehat{QPN}=\pi/3$. Найдем углы $\widehat{MQP}$ и $\widehat{MPQ}$; $\widehat{ACB}=\pi-(\pi/3+\pi/4)=5\pi/12$, и пусть дуга MN содержит z рад, а дуга $MQPN$ — t рад. Тогда $(t-z)/2=5\pi/12$, $t+z=2\pi$. Из этих уравнений находим $z=7\pi/12$ и далее разность $y-z=\frac{2\pi}{3}-\frac{7}{12}\pi=\frac{\pi}{12}$. Таким образом, $\widehat{QPM}=\frac{\pi}{24}$. Положив $|PQ|=1$, найдем S_{PQM} и S_{PQN}:



$$S_{PQM}=\frac{1}{2}\cdot 1\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{12};$$

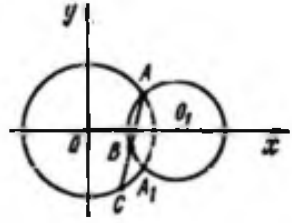
$$S_{PQN}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}\sin\frac{\пи}{3}$$

и теперь получим искомое отношение:

$$x_1=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\text{здесь } \sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right).$$

47. $\sqrt{7}/2$. ▲ Введем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы начало координат совместилось с центром большей окружности, а ось абсцисс содержала отрезок, соединяющий центры окружностей $[OO_1]$ (см. рис.). Для нахождения $|AC|$ определим координаты точек A и C. Уравнения окружностей с центрами в точках O и O_1 имеют вид



$$x^2+y^2=(\sqrt{2})^2 \qquad (1)$$ и

$$(x-2)^2+y^2=1. \qquad (2)$$

Система уравнений (1) и (2) имеет два решения, одно из которых $(x=5/4,\ y=\sqrt{7}/4)$ определяет координаты точки A. Пусть x_C и y_C — координаты точки C, тогда $x_B=(x_A+x_C)/2$, $y_B=(y_A+y_C)/2$. Имеем систему уравнений

$$x_C^2+y_C^2=2,\ \left(\frac{x_C+5/4}{2}-2\right)^2+\left(\frac{y_C+\sqrt{7}/4}{2}\right)^2=1,$$

решая которую определим: $x_C = 13/16$, $y_C = -7\sqrt{7}/16$. Теперь имеем

$$|AC| = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{4} - \frac{13}{16}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{7\sqrt{7}}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

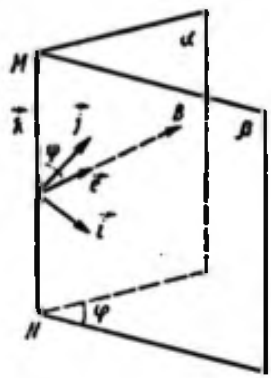
48. $\frac{9}{2}$ см². ▲ Пусть x — длина одной из диагоналей, тогда длина другой будет $6 - x$. Площадь выпуклого четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, равна половине произведения длин этих диагоналей: $S(x) = x(6-x)/2$, $x \in [0; 6]$. Таким образом, наибольшее возможное значение площади этого четырехугольника совпадает с наибольшим значением функции $S(x)$ на отрезке $[0; 6]$. Так как $S'(x) = 0$ при $x = 3$ (точка максимума) и $S(0) = S(6) = 0$, то наибольшего значения функция $S(x)$ достигает в точке $x = 3$: $\max\limits_{x \in [0; 6]} S(x) = S(3) = 9/2$ см². 49. $2(\sqrt{2} - 1)$. ● Полусумма длин оснований трапеции равна $(4 - (1 + \sqrt{2})x)/2$, где x — длина высоты. 50. $(a \sin \alpha)/3$. 51. Площадь параллелограмма будет наибольшей, если одна из его сторон совпадает со средней линией треугольника.

ГЛАВА VIII

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 1. ПРЯМАЯ, ПЛОСКОСТЬ. МНОГОГРАННИКИ. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

1. $12\sqrt{2}/5$ или $\sqrt{337}/5$ см. 2. $\arcsin(\sin\varphi \sin\psi)$. ▲ Обозначим плоскости граней двугранного угла с ребром (NM) через α и β (см. рис.). Имеем: $A \in (NM)$, $[AB] \in \alpha$,



$\widehat{(NM, AB)} = \psi$, $(\widehat{\alpha, \beta}) = \varphi$. Введем в точке A прямоугольный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ так, что $\vec{i} \perp (NM)$, $\vec{j} \perp (NM)$, $\vec{k} \parallel (NM)$ и $\vec{j} \perp \beta$.

Пусть $\vec{e}$ — орт, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{AB}$. Разложим орт $\vec{e}$ по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{e} = \cos\varphi \sin\psi \vec{i} + \sin\varphi \sin\psi \vec{j} + \cos\psi \vec{k}$. Далее имеем

$$\sin(\widehat{\vec{e}, \beta}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\widehat{\vec{e}, \vec{j}})\right) =$$

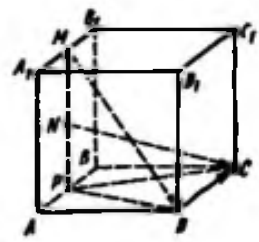
$$= \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{j}}) = \vec{e} \cdot \vec{j} = \sin\varphi \sin\psi.$$

3. $\arccos(\operatorname{ctg}\varphi \operatorname{ctg}\psi)$. Задача разрешима, если $\operatorname{ctg}\varphi \operatorname{ctg}\psi \leqslant 1$. 4. $2l(3 + \operatorname{tg}^2\varphi)$; 0. ● Рассмотрите два случая: 1) точки A и B лежат по одну сторону от плоскости γ; 2) точки лежат по разные

стороны от плоскости γ. 5. $(m+2h)/3$; $(2h-m)/3$; $m/3$. 6. $2l\sin\alpha\sqrt{2S+l^2\cos^2\alpha}$.

7. $\sqrt[4]{2V\operatorname{tg}^2\beta/\sin\alpha}$. 8. $b^2/\sqrt{2}$.

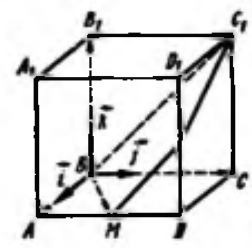
9. $\arccos(5/3\sqrt{6})$. ▲ Пусть $|AA_1|=2$, тогда из прямоугольных треугольников NPC и MPD (см. рис.) найдем $|NC|=\sqrt{6}$, $|MD|=3$. Рассмотрим векторное равенство $\vec{NC}=\vec{NM}+\vec{MD}+\vec{DC}$, или $\vec{NC}-\vec{MD}=\vec{NM}+\vec{DC}$. Возводя это равенство в квадрат, получим



$$|\vec{NC}|^2+|\vec{MD}|^2-2\vec{NC}\,\vec{MD}=$$
$$=|\vec{NM}|^2+|\vec{DC}|^2+2\vec{NM}\,\vec{DC}$$

или $6+9-2\sqrt{6}\cdot 3\cos\varphi=1+4+0$ $(\vec{NM}\perp\vec{DC})$, где $\varphi=\widehat{(\vec{NC},\vec{MD})}$. Решая уравнение $\cos\varphi=\dfrac{5}{3\sqrt{6}}$, получим ответ.

10. $\arccos(1/3)$. ▲ Введем прямоугольный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ с началом в вершине куба B (см. рис.). Искомый угол между плоскостями (BCB_1) и (BC_1M) равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Найдем векторы, нормальные к этим плоскостям. Очевидно, что вектор $\vec{n}_1\perp(BCB_1)$ имеет координаты $(1;\ 0;\ 0)$. Пусть $\vec{n}_2=(a;\ b;\ c)$ — вектор, нормальный к плоскости (BC_1M). Тогда $\vec{n}_2\vec{BC}_1=0$ и $\vec{n}_2\vec{BM}=0$.



Векторы $\vec{BC}_1$ и $\vec{BM}$ имеют координаты соответственно $(0;\ 1;\ 1)$ и $(1;\ 1/2;\ 0)$. Имеем уравнения

$$b+c=0,\quad a+\frac{b}{2}=0.$$

Полагая $c=2$, получаем $b=-2$ и $a=1$; таким образом, $\vec{n}_2=(1;\ -2;\ 2)$. Далее определяем угол между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|\cos(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}),$$

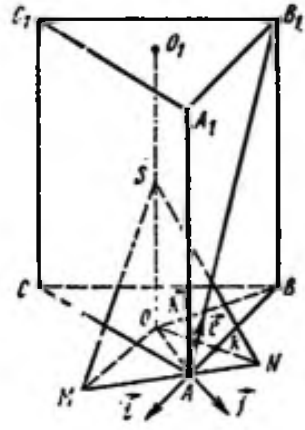
$$\cos(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})=\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}=\frac{1\cdot 1+0\,(-2)+0\cdot 2}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}.$$

Так как $1/3>0$, то угол между векторами равен углу между прямыми, параллельными этим векторам, и, следовательно, искомому углу между плоскостями (BCB_1) и (BC_1M). *Замечание.* В качестве $\vec{n}_2$ можно было взять вектор $\vec{n}_2=(c/2;\ -c;\ c)$, $(c\neq 0)$.

11. $a\sqrt{29}/3$. 12. $l^3\sin^2\beta\sqrt{3\cos^2\beta-\sin^2\beta}/3$.

13. $\dfrac{p^3\sin\alpha}{16\,(1+\sin(\alpha/2))^3}\cdot\dfrac{\sqrt{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}}{\sin(\beta/2)}$.

14. $\sqrt{(S\cos\alpha)^3}\operatorname{tg}\alpha/\sqrt{27}$. 15. $\arccos(\sqrt{3}/4)$. ● Определите угол между прямыми AC и PQ, используя равенство $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{CA}|\cos\varphi$, где $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QC}+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})/3$ и φ — искомый угол. 16. $a^3\sqrt{6}/8$. ● Докажите, что $(MN)\perp(PQ)$. 17. $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$. ▲ В правильном тетраэдре известны все угловые размеры, в частности α — величина двугранного угла, образованного боковой гранью и плоскостью основания; $\sin\alpha=2\sqrt{2}/3$; $\cos\alpha=1/3$.



Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма (см. рис.). Имеем: $|AB|=3$, $|AA_1|=4\sqrt{3}$, MSN — боковая грань правильного тетраэдра, $[AB_1]\in(MSN)$. Введем обозначение $\widehat{NOB}=\varphi$ и в точке A прямоугольный базис $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ так, что $\vec{i}\uparrow\uparrow[BA)$, $\vec{k}\uparrow\uparrow[AA_1)$; $\vec{j}\perp(ABB_1)$. Обозначим через $\vec{e}$ и $\vec{n}$ орты: $\vec{e}\uparrow\uparrow[AB_1)$ и $\vec{n}\perp(MSN)$. Орты $\vec{e}$ и $\vec{n}$ могут быть представлены в базисе $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ следующим образом:

$$\vec{e}=-\sqrt{\frac{3}{19}}\,\vec{i}+\frac{4}{\sqrt{19}}\,\vec{k},\quad \vec{n}=$$

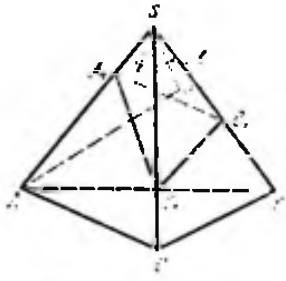
$$=(\vec{i}\sin\varphi+\vec{j}\cos\varphi)\sin\alpha+\vec{k}\cos\alpha.$$

Из условия $[AB_1]\in(MSN)\Rightarrow\vec{n}\,\vec{e}=4/(3\sqrt{19})-\sqrt{3/19}\,(2\sqrt{2}/3)\times\sin\varphi=0$. Из последней формулы находим: $\sin\varphi=\sqrt{2/3}$; $\cos\varphi=1/\sqrt{3}$. Из треугольников OBK и AKN — длину отрезка $[ON]$, а из треугольника OSN — длину ребра тетраэдра $|SN|$. 18. $a/\sqrt{2}$; $a/(2\sqrt{6})$. 19. $a/\sqrt{2}$. 20. $2R^3\sqrt{3}/(27\sin^3\alpha\cos\alpha)$.

21. $(\sqrt{3}\,l^3\operatorname{tg}^2\alpha)/\sqrt{(4\operatorname{tg}^2\alpha+1)^3}$. 22. $(\sqrt{3}/4)\,b^3(4\operatorname{tg}^2\alpha+1)^{3/4}\operatorname{ctg}^2\alpha$.

23. $6\sqrt[6]{3}\sqrt[3]{V^2\operatorname{ctg}^2\alpha}\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\right|\cos\alpha\Big)$. 24. $(a^3\operatorname{tg}\alpha)/24$, $(a^3\operatorname{tg}\alpha)/8$, $\alpha\in]0,\pi/2[$. ● Рассмотрите два случая: 1) ортогональная проекция вершины на плоскость основания пирамиды совпадает с центром вписанного в правильный треугольник круга и 2) ортогональная проекция вершины на плоскость основания пирамиды совпадает с центром окружности, которая касается одной из сторон правильного треугольника и продолжений двух других сторон этого треугольника. 25. $\dfrac{a(a^2-b^2)}{24}\operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{a(a^2-b^2)}{8}\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha\in]0;\pi/2[$. ● $V_{AB_1C_1CB}=V_{ABCA_1B_1C_1}-V_{AA_1B_1C_1}$. Объем $V_{ABCA_1B_1C_1}$ данной усеченной пирамиды вычислите как разность объемов пирамид $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ и воспользуйтесь указанием, приведенным в ответе к предыдущей задаче. 26. $(\sqrt{3}/4)(1+2\operatorname{tg}\varphi)\,a^2$; $(\sqrt{3}/4)\times(\operatorname{tg}\varphi+\sec\varphi+1)\,a^2$; $\varphi\in]0,\pi/2[$. 27. $1/7$. 28. $\arccos 7/15$. ● Докажите, что длина бокового ребра пирамиды вдвое больше длины стороны основания. 29. б) $\arccos\dfrac{1-3\cos^2\varphi}{2}$. ▲ Обозна-

чим величину плоского угла, прилежащего к основанию боковой грани, через α и величину искомого угла — через ψ. По теореме косинусов для трехгранного угла, образованного смежными боковыми гранями и основанием, находим два равенства



$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\varphi, \\ \cos\dfrac{\pi}{3} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\psi, \end{cases}$$

из которых следует $\cos\psi = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\cos^2\varphi$.

30. $(\sqrt{3}/4)\,h^3(3\,\mathrm{tg}^2\varphi - 1)$, $\varphi \in]\pi/6;\ \pi/2[$.

31. 25/2. ▲ Пусть $(AO) \perp (BSC)$, $\widehat{ASO} = \varphi$, $\widehat{BSC} = \alpha$ (см. рис.), тогда

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\,|CS|\,|BS|\,\sin\alpha\,|AS|\,\sin\varphi,$$

$V_{SA_1B_1C_1} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\,|C_1S|\,|B_1S|\,\sin\alpha\,|A_1S|\,\sin\varphi$. Отсюда имеем

$$V_{SA_1B_1C_1} : V_{SABC} = (|A_1S|\,|B_1S|\,|C_1S|) : (|AS|\,|BS|\,|CS|).$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$\frac{V_{SABC} - V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SA_1B_1C_1}} = \frac{(1+2)(1+2)(2+1) - 1\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 1\cdot 2} = \frac{25}{2}.$$

32. $\pi/2$. ● Воспользуйтесь решением задачи 31.

33. $2a^2\cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha}$; $(a^3/3)\sin 2\alpha\cos\alpha$. 34. 1.

35. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3\dfrac{\cos(\alpha/2)}{\sqrt{-\cos\alpha}}$, $\alpha \in]\pi/2;\ \pi[$.

36. $\left(4h^3\sin^2\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\right)\Big/\left(3(1+\sin^2\beta)^{3/2}\right)$, $\beta \in]0;\ \pi[$.

37. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{6}a^3$. 38. $6\left(\sqrt[3]{\dfrac{ak^2}{6}\dfrac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}}\right)^2$,

$6\left(\sqrt[3]{\dfrac{ak^2}{6}\dfrac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin|\alpha-\gamma|}}\right)^2$, $\alpha \neq \gamma$. 39. 26 м². 40. $\mathrm{arctg}\,\dfrac{m^2-1}{2m}$.

41. $\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta}\right)$. 42. $\arccos\left(\sqrt{-\cos\alpha}\right)$, $\alpha \in]\pi/2;\ \pi[$. Используйте теорему косинусов для трехгранного угла.

43. $\mathrm{arctg}\sqrt{3/2}$. 44. $(a^3/8\pi)\sin 2\alpha\cos\alpha$. 45. $\dfrac{\pi b^3}{8}\dfrac{\mathrm{ctg}\dfrac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin^2\dfrac{\beta}{2}}$.

46. $\dfrac{S\sin\dfrac{\alpha}{2}}{3\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\dfrac{S\left(1-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\pi\sin\dfrac{\alpha}{2}}}$. 47. $\dfrac{\pi\sqrt{\ }}{2}a^3$.

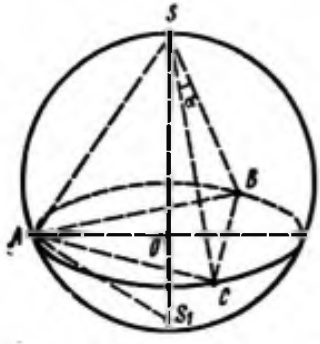
48. $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{10\pi+3\sqrt{3}}$. 49. $\frac{\pi a^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\beta}$. 50. $\frac{7}{17}$.

§ 2. ЗАДАЧИ НА КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

1. $\frac{4V}{\sqrt[3]{3\,(4V\operatorname{ctg}\alpha)^{2/3}}}$. 2. $(a^3(2+\operatorname{tg}\alpha)^3\operatorname{ctg}^2\alpha)/6$. 3. При $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\beta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\alpha\neq\beta$ два решения: $\frac{V}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\frac{V}{\sin|\alpha-\beta|}$; при $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\beta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\alpha=\beta$ одно решение: $\frac{V}{\sin(\alpha+\beta)}$; здесь $V=\frac{4a^3}{15}\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\alpha\sin\beta$. 4. $\frac{32r^3\sqrt{\cos\alpha}}{3\sin\frac{\alpha}{2}}$. 5. $\frac{\pi l^3\cos\alpha}{1+3\cos^2\alpha}$.

6. $\frac{\pi l^3\sin^2\frac{\alpha}{2}}{9}\sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{3}}$. 7. $\frac{\pi r^3}{\sin^3(\alpha/2)}$. 8. $\frac{\pi a^3}{24}\sin^3\alpha\operatorname{tg}\varphi$.

9. $2\arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$, $\alpha\in\,]0;\pi/4[$. 10. $\frac{ab\left(\sqrt{4a^2b^2+c^2(a^2+b^2)}\pm 2ab\right)}{c(a^2+b^2)}$.



11. $\frac{3h}{4\cos\alpha+2}$, $\alpha\in\left]0;\frac{2}{3}\pi\right[$.

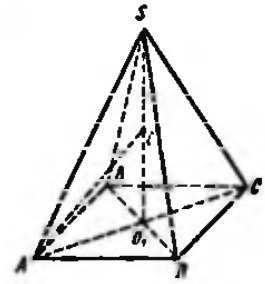
▲ Так как пирамида $SABC$ (см. рис.) — правильная, то центр описанной около нее сферы лежит на прямой (SO) ($|SO|=h$), лежащей в плоскости (ASS_1) (S_1 — точка пересечения прямой (SO) со сферой). Соединив точку A с S_1 отрезком, получим прямоугольный треугольник SAS_1 $\left(A=\frac{\pi}{2}\right.$ — как вписанный угол, опирающийся на диаметр $\left.SS_1\right)$. Пусть $|SS_1|=2R$, $|BC|=x$; тогда $|AO|=x/\sqrt{3}$ и из пропорции $\frac{|OS_1|}{|AO|}=\frac{|AO|}{|OS|}$ имеем $x^2/3=h(2R-h)$. Поскольку $\triangle AOS$ — прямоугольный, то $|AS|^2=x^2/3+h^2$. Найдем $|AS|$:

$$|AS|^2+|SC|^2-2|AS||SC|\cos\alpha=x^2 \quad (|AS|=|SC|),$$

$$|AS|^2=x^2/(2(1-\cos\alpha)) \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{2(1-\cos\alpha)}=\frac{x^2}{3}+h^2,$$

откуда $\frac{x^2}{3}=\frac{2h^2(1-\cos\alpha)}{1+2\cos\alpha}$. Решив далее уравнение $\frac{2h^2(1-\cos\alpha)}{1+2\cos\alpha}=$

$= h(2R-h)$, получим ответ. 12. $\frac{\sqrt{h^2\cos^2\alpha+a^2}}{2\cos\alpha}$. ● Центр описанной сферы расположен в точке пересечения плоскости, перпендикулярной высоте пирамиды и проходящей через ее середину, и прямой, перпендикулярной плоскости основания пирамиды и проходящей через середину гипотенузы треугольника, лежащего в основании пирамиды. 13. $\frac{4\pi a^2}{9\sqrt{3\sin^2 2\alpha}}$. 14. $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\varphi\sin^2\varphi\sin\alpha$, $\varphi\in]0;\ \pi/4[$. 15. $\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$, $\alpha\in]\pi/4;\ \pi/2[$. 16. $\{\arcsin(2/\sqrt{5});\ \pi/4\}$. 17. $\left\{\arccos\frac{309}{325};\ \arccos\frac{3}{13}\right\}$. ▲ Так как боковые ребра пирамиды $SABCD$ составляют с плоскостью основания равные углы (см. рис.), то ортогональная проекция O_1 вершины пирамиды S на плоскость основания $(ABCD)$ есть центр окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$. Сечение описанной сферы плоскостью основания пирамиды $(ABCD)$ есть окружность, описанная около прямоугольника $ABCD$. Следовательно, центр O описанной сферы принадлежит прямой (SO_1). Треугольник ASC — равнобедренный, так как $\widehat{SAC}=\widehat{SCA}$. Сторона основания $[AC]$ этого треугольника является в то же время диагональю прямоугольника $ABCD$, поэтому $|AC|=\sqrt{|AB|^2+|BC|^2}=5$. Поскольку центр сферы, описанной около пирамиды, принадлежит плоскости (ASC), то радиус R окружности, описанной около треугольника ASC, равен 6,5. Из прямоугольного треугольника AOO_1, имеем:



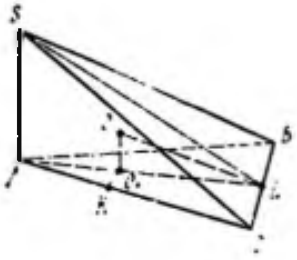
$$|SO_1|-R=R^2-\frac{|AC|^2}{4},$$

$$|SO_1|=R\pm\sqrt{R^2-\frac{|AC|^2}{4}}=6{,}5\pm 6.$$

Если центр описанной сферы O принадлежит пирамиде $SABCD$, то перед корнем следует брать знак плюс. Длина бокового ребра определяется из прямоугольного треугольника ASO_1: $|AS|=\sqrt{|SO_1|^2+|OC_1|^2}=\sqrt{162{,}5}$. Из треугольника BSC (по теореме косинусов) находим:

$$\cos(\widehat{BSC})=\frac{|BS|^2+|CS|^2-|BC|^2}{2|BS||CS|}=\frac{309}{325},\quad \widehat{BSC}=\arccos\frac{309}{325}.$$

Если центр сферы O не принадлежит пирамиде $SABCD$, то перед корнем следует брать знак минус, тогда $\widehat{BSC}=\pi-\arccos\left(-\frac{3}{13}\right)=\arccos\frac{3}{13}$. 18. $\frac{b\sin\alpha}{2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}$. ▲ Пусть



точка O — центр шара, вписанного в пирамиду $SABC$ (см. рис.), у которой $AC = AB = b$, $(SA) \perp (ABC)$, (ALS) — биссекторная плоскость двугранного угла, образованного боковыми гранями ASC и ASB. По условию задачи, $\widehat{BAC} = \widehat{ALS} = \alpha$. Точка $O \in (ALS)$ и (OL) — биссектриса угла ALS. Проекция точки O на плоскость основания, которую мы обозначим через O_1, принадлежит биссектрисе (AL) угла CAB, а проекцией вписанного шара на плоскость основания является большой круг шара с центром в точке O_1, касающийся сторон AB и AC треугольника ABC. Обозначим точку касания этого круга со стороной AC через K, тогда $O_1K = OO_1 = r$, где r — радиус вписанного шара.

Из прямоугольного треугольника OO_1L находим $O_1L = r \operatorname{ctg}(\alpha/2)$. Далее, имеем $AO_1 = AL - O_1L = b\cos(\alpha/2) - r\operatorname{ctg}(\alpha/2)$. Из прямоугольного треугольника AO_1K получим уравнение

$$O_1K = r = AO_1 \sin(\alpha/2) = (b\cos(\alpha/2) - r\operatorname{ctg}(\alpha/2))\sin(\alpha/2),$$

решая которое относительно r, находим ответ. **19.** $hr/(\sqrt{r^2+4h^2} \pm r)$. ● Рассмотрите два случая расположения центра шара относительно плоскости основания пирамиды. **20.** $\{1/2\sqrt{6};\ 1/\sqrt{6}\}$. ● При решении задачи учтите, что существует пять сфер, касающихся всех плоскостей граней любой треугольной пирамиды: сфера, вписанная в пирамиду, и четыре сферы, каждая из которых касается одной из граней пирамиды и продолжений трех других ее граней. **21.** $\frac{\pi a^3}{6}\sin^3\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$. ● Найдите объем пирамиды V, площадь полной поверхности пирамиды S и из уравнения $V = (1/3)rS$ определите радиус вписанного шара r. **22.** $\frac{\pi a^2\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$, $\alpha \in]0;\ \pi/2[$. ● Для нахождения радиуса шара r воспользуйтесь формулой $r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, где φ — величина угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. **23.** $\frac{S\operatorname{ctg}^2(\beta/2)}{\pi\cos\beta}$.

24. $\left\{\frac{4R^3}{3}\cdot\frac{(1+\operatorname{tg}(\beta/2))^2}{1-\operatorname{tg}(\beta/2)}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2};\ \frac{4R^3}{3}\cdot\frac{(1-\operatorname{tg}(\beta/2))^2}{1+\operatorname{tg}(\beta/2)}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right\}$. ● Рассмотрите два случая: 1) сфера вписана в пирамиду и 2) сфера касается основания пирамиды и продолжений боковых граней.

25. $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{m^2+mn+n^2}{mn}$. **26.** $\frac{a\sqrt{\cos 2\beta}}{2\sin\beta+\sqrt{2}}$. **27.** $-\frac{\pi R^3}{3}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha$.

28. $r\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\gamma}{2}\right)$. **29.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}$. **30.** $\arccos(1/5)$.

31. $(a+\sqrt{a+1})/(2\sqrt{a})$. **32.** $q^2(2-q)$, $q \in]0;\ 2[$.

33. $\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}$. 34. $\left\{\frac{1183\pi R^3}{12\,000};\ \frac{637\pi R^3}{12\,000}\right\}$. ▲ Пусть правильная треугольная пирамида $ABCD$ вписана в сферу радиуса R с центром в точке O. При этом вершины пирамиды принадлежат сфере, а высота пирамиды $[DO_1]$, где O_1 — центр равностороннего треугольника ABC, принадлежит диаметру данного шара. Отметим, что рассматриваемая фигура имеет плоскость симметрии (DAD_1), где D_1 — пересечение (DO_1) со сферой. Имеем $|OD| = |OA| = R$. По условию задачи, $|OO_1| = 0{,}3R$, $|D_1O_1| = 0{,}7R$. Из подобия прямоугольных треугольников AD_1O_1 и ADO_1 находим $|AO_1|^2 = |D_1O_1|\,|DO_1| = 1{,}3R \cdot 0{,}7R = 0{,}91R^2$. Длина отрезка $[O_1A]$ является радиусом описанного около $\triangle ABC$ круга; тогда радиус r вписанного круга может быть найден по формуле $r = |AO_1|/2$. Вычислим объем V_1 конуса, вписанного в пирамиду,

$$V_1 = (\pi r^2/3)\,|DO_1| = 1183\pi R^3/12\,000.$$

Условиям задачи удовлетворяет и пирамида с вершиной в точке D_1. В этом случае объем V_2 конуса равен $637\pi R^3/12000$.

35. $\left\{\pi R^2(4-\sqrt{7})/2;\ \frac{\pi R^2(12-3\sqrt{15})}{2}\right\}$. 36. $2r^2\sin\beta$.

37. $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. ● Покажите, что диагональ квадрата, получающегося в сечении призмы, имеет длину, равную длине большей диагонали ромба. 38. $4r^2(\sin\alpha\cos\beta)$. ● Докажите, что площадь сечения призмы $S_{сеч}$ и площадь трапеции, лежащей в основании призмы, связаны соотношением $S_{сеч}\cos\beta = S$.

39. $\frac{a^2\sin\psi\sin(\gamma\pm\psi)}{4\sqrt{3}\sin^2\gamma\sin^2(\alpha/2)}$ при $\gamma\in[\varphi;\ \pi/2]$; $\alpha\in]0;\ 2\pi/3[$,

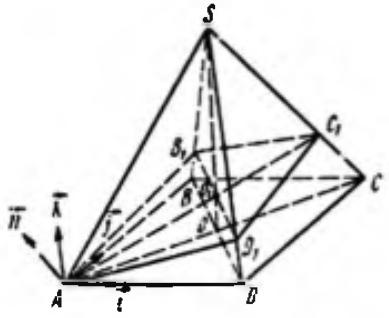
$\frac{a^2\sin\varphi\sin(\gamma-\psi)}{4\sqrt{3}\sin^2\gamma\sin^2(\alpha/2)}$ при $\gamma\in]\psi;\ \varphi[$, $\alpha\in]0;\ 2\pi/3[$,

0 — в остальных случаях; здесь $\varphi = \arccos\left(\frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{\sqrt{3}}\right)$, $\psi = \arccos\left(\frac{2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3}}\right)$. ● При решении задачи учтите, что $\gamma\in]0;\ \pi/2[$.

40. $\{(3\sqrt{3}/4)k^2\cos^2\gamma;\ (\sqrt{3}/4)k^2\cos\gamma;\ (\sqrt{3}/2)k^2\cos\gamma\sqrt{1+3\cos^2\gamma}\}$, где $\cos\gamma = 1/\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}$. ● При решении задачи учтите, что у любой треугольной пирамиды существует 7 плоскостей, равноудаленных от ее вершин. 41. $\left\{\frac{l^2\cos^2\beta}{1+\cos^2\beta};\ \frac{3l^2\cos\beta}{4(1+\cos^2\beta)}\right\}$.

42. $a^2(1-\operatorname{ctg}^2\alpha)\sin\alpha$, $\alpha\in[\pi/4;\ \pi/2[$. ● Определите длины диагоналей d_1 и d_2 сечения и вычислите площадь сечения S по формуле $S = d_1d_2/2$. 43. $\frac{4r^2}{\sin^2\alpha}$.

44. $3a^2\sqrt{2}/5$. ▲ Введем в точке A прямоугольный базис $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ так, как показано на рис. Пусть $\widehat{C_1AC} = \alpha$ и рассмотрим орт $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости сечения $AB_1C_1D_1$. По условию за-



дачи, $(\widehat{\vec{n}, \vec{j}}) = 120°$, а вектор $\vec{n}$ может быть представлен в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ следующим образом:

$$\vec{n} = -\sin\alpha\cos 45°\vec{i} - \sin\alpha\cos 45°\vec{j} + \cos\alpha\vec{k}.$$

Далее имеем

$$(\vec{n}\vec{j}) = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{j}}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sin\alpha\cos 45° = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 45°.$$

Из треугольников ASC и AC_1C после несложных вычислений находим: $AC_1 = 8a/5$, $AO = OO_1 = a\sqrt{2}/2$, $SO_1 = 3a\sqrt{2}/2$. Из подобия треугольников SBD и SB_1D_1 найдем $B_1D_1 = 3a\sqrt{2}/4$. Теперь получаем $S = (1/2)\,AC_1 \cdot B_1D_1 = \ldots$ 45. Если ортогональная проекция сечения принадлежит меньшей из двух частей основания пирамиды, на которые секущая плоскость делит основание пирамиды, то площадь сечения дается формулой

$$S = \frac{a^2\sin\alpha}{9\sin(\alpha+\beta)}\left(2 + \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right), \quad \beta \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Если ортогональная проекция сечения принадлежит большей части основания пирамиды, то

$$S = \frac{2a^2\sin\alpha}{9\sin(\alpha+\beta)}\left(1 + \frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right), \quad \beta \in [0;\ \operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}\alpha)],$$

$$S = \frac{a^2\sin\alpha}{9\sin(\beta-\alpha)}\left(2 - \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\right), \quad \beta \in \left[\operatorname{arcctg}(3\operatorname{tg}\alpha);\ \frac{\pi}{2}\right).$$

46. $\sqrt[3]{4v/3}$. ▲ Пусть x — длина стороны основания призмы, H — длина бокового ребра, тогда $v = Hx^2\sqrt{3}/4$ или $H = \dfrac{4v}{x^2\sqrt{3}}$. Найдем сумму длин всех ребер призмы: $S = 3H + 6x = 6x + 4\sqrt{3}v/x^2$. Таким образом, имеем функцию

$$S(x) = 6x + 4\sqrt{3}v/x^2, \quad x \in (0;\ \infty),$$

наименьшее значение которой на указанном промежутке требуется найти. Найдем критические точки функции $S(x)$. Имеем

$$S'(x) = 6 - 8\sqrt{3}v/x^3 = 0, \quad x = \sqrt[3]{4V/\sqrt{3}};$$

на промежутке $\left(0;\ \sqrt[3]{4V/\sqrt{3}}\right)$ $S'(x) < 0$ ($S(x)$ убывает), на промежутке $\left(\sqrt[3]{4V/\sqrt{3}},\ \infty\right)$ $S'(x) > 0$ ($S(x)$ возрастает). Следовательно, при $x = \sqrt[3]{4V/\sqrt{3}}$ функция $S(x)$ имеет минимум, совпадающий с ее наименьшим значением на рассматриваемом промежутке $(0;\ \infty)$. 47. $\dfrac{H}{3}$; $\dfrac{4\pi R^2 H}{27}$. ● Найдите наибольшее значение

функции $V(x)=\pi R^2 x\left(\frac{H-x}{H}\right)^2$ на отрезке $x\in[0;\ H]$ (x — длина высоты цилиндра). 48. $2\sqrt{2}R/3$; $4R/3$. ● Найдите значения h, $h\in[0;\ 2R]$, при которых функция $V(h)=\frac{\pi h^2}{3}(2R-h)$ принимает наибольшее значение на указанном отрезке ($r^2=h(2R-h)$). 49. Конус с радиусом основания, равным $R\sqrt{2}$, и высотой, равной $4R$. ▲ Пусть r, H, φ — радиус основания конуса, длина его высоты и величина угла наклона образующей к плоскости основания соответственно. Имеем:

$$r=R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},\quad H=r\operatorname{tg}\varphi=R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi;\quad V(\varphi)=\frac{\pi R^3}{3}\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}^3\frac{\varphi}{2},$$

$$\varphi\in\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[.$$

Введем новую переменную $t=\operatorname{tg}(\varphi/2)$ и продифференцируем полученную функцию, тогда

$$V(t)=\frac{2\pi R^3}{3}\cdot\frac{1}{(1-t^2)t^2},\ t\in]0;\ 1[,$$

$$V'(t)=\frac{2\pi R^3}{3}\cdot\frac{2(2t^2-1)}{(1-t^2)^2t^3}.$$

В точке $t=1/\sqrt{2}$ $V'(1/\sqrt{2})=0$, на интервале $]0;\ 1/\sqrt{2}[$ $V'(t)<0$, а на интервале $]1/\sqrt{2};\ 1[$ $V'(t)>0$, т. е. в точке $t=1/\sqrt{2}$ функция $V(t)$ имеет минимум, совпадающий с наименьшим значением функции на указанном промежутке $t\in]0;\ 1[$. Далее находим $r=R\sqrt{2}$ и $H=R\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{2\cdot1\sqrt{2}}{1-1/2}=4R$. 50. $R\sqrt{3}$. 51. $\frac{4}{3}R$; $\frac{64}{81}R^3$. 52. $\frac{H}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{9}R^2H$. 53. $\pi/4$. 54. $k^2\sin2\alpha$ при $\alpha\in\left]\operatorname{arcctg}\frac{1}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{2}k^2(1+3\cos^2\alpha)$ при $\alpha\in\left]0;\ \operatorname{arcctg}\frac{1}{2}\right]$. ▲ При пересечении конуса плоскостью, проходящей через его вершину, в сечении получается равнобедренный треугольник, площадь которого S; $S=\frac{1}{2}l^2\sin\varphi$, где l — длина образующей конуса, φ — величина угла между образующими, по которым плоскость пересекает коническую поверхность. Поскольку длина образующей равна длине бокового ребра пирамиды, вписанной в этот конус, то площадь сечения является функцией угла φ, причем в общем случае $\varphi\in]0;\ \pi[$.

Наибольшим значением φ является угол γ в осевом сечении конуса, поэтому при исследовании знака производной функции $S'(\varphi)=\frac{1}{2}l^2\cos\varphi$ сталкиваемся с двумя возможностями: 1) если $\gamma\in]0;\ \pi/2[$, то $\cos\varphi>0$ и $S(\varphi)$ возрастает на этом промежутке и достигает наибольшего значения при $\varphi=\gamma$; в этом случае $S_{max}=\frac{1}{2}l^2\sin\gamma$; 2) если $\gamma\in[\pi/2;\ \pi[$, то $\cos\varphi\leqslant0$ и $\varphi=\pi/2$

является точкой максимума функции $S(\varphi)$, поэтому в этом случае $S_{\max}=l^2/2$.

Пусть β — величина угла между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания, h — длина ее высоты. Имеем: $h\operatorname{ctg}\beta=2h\operatorname{ctg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\beta=2\operatorname{ctg}\alpha$ и $h=k\sin\alpha$. Найдем длину образующей конуса (бокового ребра пирамиды): $l=h/\sin\beta$. Теперь находим выражение для площади сечения:

$$S_{\text{сеч}}=\frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sin\beta}\right)^2\sin\varphi=\frac{1}{2}k^2\sin^2\alpha\,(1+4\operatorname{ctg}^2\alpha)\sin\varphi.$$

Величина угла в осевом сечении конуса γ будет меньше $\pi/2$, если $\beta>\pi/4$, т. е. $2\operatorname{ctg}\alpha<1$ или $\alpha\in\left]\operatorname{arcctg}\frac{1}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$; в этом случае

$$S_{\max}=\frac{1}{2}k^2\sin^2\alpha\,2\operatorname{ctg}\beta=2k^2\sin^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha=k^2\sin 2\alpha.$$

Если же $0<\beta\leqslant\pi/4$, т. е. при $\alpha\in]0;\ \operatorname{arcctg}(1/2)]$

$$S_{\max}=\frac{1}{2}l^2=\frac{1}{2}k^2\sin^2\alpha\,(1+4\operatorname{ctg}^2\alpha)=\frac{k^2}{2}(1+3\cos^2\alpha).$$

§ 3. ОБЪЕМЫ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

1. $\dfrac{\pi a^3\sin^3\alpha\sin^2\beta}{3\sin^3(\alpha+\beta)}$. **2.** $\dfrac{\pi b^3}{12}(\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta)$. **3.** $\dfrac{\pi a^3\sin^3\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$.

4. $3\pi/10$. **5.** $\pi/5$. **6.** а) 5π. ▲ $V=\pi\int\limits_0^3(|\,|x-1\,|-2\,|)^2\,dx=$

$$=\pi\int\limits_0^1(-x+1-2)^2\,dx+\pi\int\limits_1^3(x-1-2)^2dx=\frac{\pi(x+1)^3}{3}\Big|_0^1+$$

$$+\frac{\pi(x-3)^3}{3}\Big|_1^3=5\pi.$$

При вычислениях использованы соотношения $|f(x)|^2=(f(x))^2$ и

$$|x-1\,|-2=\begin{cases}-x-1, & x\in]-\infty;\ 1[,\\ x-3, & x\in[1;\ \infty[;\end{cases}$$

б) $32\pi/3$. ▲ Объем V найдем с учетом того, что

$$|x-1\,|-|x+1\,|=\begin{cases}2, & x\in]-\infty;\ -1[,\\ -2x, & x\in[-1;\ 1[,\\ -2, & x\in[1;\ \infty[:\end{cases}$$

$$V=\pi\int\limits_{-2}^{2}(|\,|x-1\,|-|\,x+1\,|)^2\,dx=\pi\int\limits_{-2}^{-1}4\,dx+\pi\int\limits_{-1}^{1}4x^2dx+\pi\int\limits_{1}^{2}4\,dx;$$

в) $18\pi/5$; г) $2{,}1\pi$; д) 8π. **7.** Диагональ квадрата перпендикулярна оси вращения. ● Обозначив длину стороны квадрата через a, а величину угла, образованного одной из сторон квадрата с осью вращения, — через α покажите, что объем получающегося тела вращения равен

$$\pi a^3(\sin\alpha+\cos\alpha).$$

ГЛАВА IX

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ

1. $A=\{1;\ 2;\ a;\ 5\}$, если $a\neq 1$, $a\neq 2$, $a\neq 5$; $A=\{1;\ 2;\ 5\}$, если $a=1$, или $a=2$, или $a=5$; $B=\varnothing$, если $a\neq 1$ или $a\neq 2$; $B=\{1\}$, если $a=1$; $B=\{2\}$, если $a=2$. 2. ● Докажите, что из трех последовательных натуральных чисел одно кратно 2 и одно кратно 3. 3. ● Покажите, что квадрат любого целого числа не может иметь в разряде единиц цифру 2. 4. 11. 5. 17. 6. ▲ Предположим противное, т. е. $\log_2 5=m/n$, где $m,\ n\in N$. Тогда $2^{m/n}=5$ или $2^m=5^n$, что невозможно, так как 2^m — число четное при любом $m\in N$, а 5^n — нечетное при любом $n\in N$. Таким образом, наше предположение неверно, поэтому число $\log_2 5$ не является рациональным. 7. $a<0$. 8. 1/2. ▲ $a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2)^2+c^4-2(ab)^2=(1-c^2)^2+c^4-2((2c^2-1)/2)^2=2c^4-2c^2+1-2c^4+2c^2-1/2=1/2$. 9. а) ▲ Доказательство проведем методом математической индукции. При $n=1$ имеем $1^2=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$, т. е. равенство выполняется. Предположив теперь, что формула верна при $n=k$, докажем ее справедливость и при $n=k+1$. Так как $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, то $(1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2)+(k+1)^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$, что и означает справедливость формулы для любого $n\in N$; б) ● Проведите доказательство методом математической индукции; 10. а) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$. ● Заметьте, что

$$S_n=\frac{1}{2}(1^3+1+2^3+2+3^3+3+\ldots+n^3+n)=$$

$$=\frac{1}{2}((1+2+3+\ldots+n)+(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)),$$

и воспользуйтесь результатом задачи 9 а); б) $(n(n+1)/2)^2$. ▲ Запишем n очевидных тождеств:

$$(1+1)^4=2^4=1^4+4\cdot 1^3\cdot 1+6\cdot 1^2\cdot 1^2+4\cdot 1\cdot 1^3+1^4,$$
$$(2+1)^4=3^4=2^4+4\cdot 2^3\cdot 1+6\cdot 2^2\cdot 1^2+4\cdot 2\cdot 1^3+1^4,$$
$$(3+1)^4=4^4=3^4+4\cdot 3^3\cdot 1+6\cdot 3^2\cdot 1^2+4\cdot 3\cdot 1^3+1^4,$$
$$\vdots$$
$$(n+1)^4=n^4+4\cdot n^3\cdot 1+6\cdot n^2\cdot 1^2+4\cdot n\cdot 1^3+1^4.$$

Складывая все n строк и приводя подобные члены, получаем

$$(n+1)^4=4(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)+6(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+$$
$$+4(1+2+\ldots+n)+(n+1),$$

откуда

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}\left((n+1)^4-\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}-\right.$$

$$\left.-4\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)\right);$$

после простых преобразований правой части находим ответ. **11.** ▲ Пусть $xy=1$, тогда $y=1/x$. Требуется доказать, что если $x+1/x=A$, то $A\geqslant 2$. Рассмотрим разность $A-2=x+1/x-2=(x-1)^2/x$; эта разность неотрицательна при всех $x>0$; следовательно, $A\geqslant 2$. **12.** ▲ Имеем $x_1x_2x_3\ldots x_n=1$, $x_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$. Докажем, что $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n\geqslant n$, причем $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n>n$, если числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ не все одинаковы. Доказательство проведем методом математической индукции. При $n=1$, 2 утверждение верно (если $n=1$, то $x_1=1$ и $1\geqslant 1$; для $n=2$ истинность утверждения следует из решения предыдущей задачи).

Предполагая, что утверждение верно для $n=k\geqslant 2$, т. е. что неравенство $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_k\geqslant k$ справедливо, если $x_1x_2x_3\ldots x_k=1$, докажем, что $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{k+1}\geqslant k+1$, если $x_1x_2x_3\ldots x_{k+1}=1$. Пусть среди множителей $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ не все одинаковы (в случае $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_{k+1}=1$ доказательство очевидно: $x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}=k+1$). Тогда среди множителей найдутся числа как большие, так и меньшие единицы (все сомножители не могут быть меньше единицы, так как в этом случае их произведение будет меньше 1). Допустим, что $x_1>1$, а $x_{k+1}<1$. Имеем $(x_1x_{k+1})x_2x_3\ldots x_k=1$. Полагая $x_1x_{k+1}=y_1$, получаем $y_1x_2x_3\ldots x_k=1$. Так как произведение k положительных чисел равно 1, то (согласно предположению индукции) их сумма не меньше k:

$$y_1+x_2+x_3+\ldots+x_k\geqslant k$$

отсюда имеем

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{k+1}=(y_1+x_2+x_3+\ldots+x_k)-y_1+x_1+x_{k+1}\geqslant$$

$$\geqslant k-y_1+x_1+x_{k+1}=(k+1)-1-x_1x_{k+1}+x_1+x_{k+1}=$$

$$=k+1+(x_{k+1}-1)(1-x_1).$$

А так как $x_1>1$ и $x_{k+1}<1$, то $(x_{k+1}-1)(1-x_1)>0$ и поэтому

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{k+1}\geqslant(k+1)+(x_{k+1}-1)(1-x_1)>k+1.$$

Этим утверждение задачи полностью доказано. **13.** ▲ Пусть

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}=a,\quad \sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}=b.$$

Из последнего равенства имеем

$$\sqrt[n]{\frac{x_1}{b}\cdot\frac{x_2}{b}\cdot\frac{x_3}{b}\ldots\frac{x_n}{b}}=1 \text{ или } \frac{x_1}{b}\cdot\frac{x_2}{b}\ldots\frac{x_n}{b}=1.$$

Так как произведение n положительных чисел равно 1, то (см. задачу 12) их сумма не меньше n, т. е.

$$\frac{x_1}{b}+\frac{x_2}{b}+\ldots+\frac{x_n}{b}\geqslant n.$$

Умножив обе части неравенства на b и разделив на n, получим

$$a=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant b,$$

что и требовалось доказать. *Замечание.* Знак равенства имеет место только тогда, когда $\frac{x_1}{b}=\frac{x_2}{b}=\ldots=\frac{x_n}{b}=1$, т. е. когда все числа x_i, $i=1, 2, 3, \ldots, n$, равны между собой. 14. ▲ Пользуясь результатом предыдущей задачи, имеем

$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}<\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}=\frac{(n+1)\,n}{2n}=\frac{n+1}{2}.$$

Возводя в n-ю степень обе части последнего неравенства, получим исходное неравенство. 15. ▲ Докажем неравенство методом математической индукции. При $n=1$ имеем $1+x_1\geqslant 1+x_1$. Одно из соотношений, «$>$» или «$=$», имеет место: следовательно, утверждение верно. Пусть неравенство выполняется при $n=k$, $k\in N$. Докажем, что оно выполняется и при $n=k+1$, т. е.

$$((1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k))(1+x_{k+1})\geqslant$$
$$\geqslant(1+x_1+x_2+\ldots+x_k)+x_{k+1}.$$

Заменяя в правой части неравенства сумму $1+x_1+x_2+\ldots+x_k$ произведением $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)$ (неравенство усиливается) и перенося все члены неравенства в левую часть, получаем очевидное неравенство $|(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)-1|\,x_{k+1}\geqslant 0$. *Замечание.* При $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$ исходное неравенство приобретает вид

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,\quad x>-1$$

(неравенство Бернулли). 16. а) ▲ Пусть $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}=\Pi_1$, а $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{100}{101}=\Pi_2$. Так как $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, $\ldots$, $\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$, то $\Pi_1^2<\Pi_1\Pi_2=\frac{1}{101}$; следовательно, $\Pi_1<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}$. Утверждение доказано. б) ● Проведите доказательство методом математической индукции. в) ● Положите в неравенстве пункта б) $n=50$ и воспользуйтесь неравенством $\frac{1}{\sqrt{151}}<\frac{1}{\sqrt{144}}=\frac{1}{12}$.

17. ● Доказательство проведите методом математической индукции. 18. ▲ Доказательство проведем методом математической индукции. При $n=1$ утверждение верно: $|\sin\alpha|\leqslant|\sin\alpha|$. Пусть при $n=k$ выполняется неравенство $|\sin k\alpha|\leqslant k|\sin\alpha|$. Докажем, что при $n=k+1$ $|\sin(k+1)\alpha|\leqslant(k+1)|\sin\alpha|$. Используя формулу для синуса суммы двух углов неравенства $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, $|\cos\alpha|\leqslant 1$, $|\cos k\alpha|\leqslant 1$, получаем

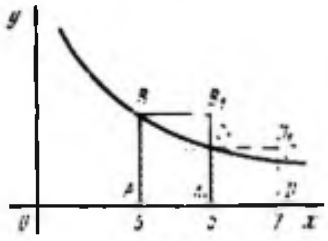
$$|\sin(k+1)\alpha|=|\sin k\alpha\cos\alpha+\cos k\alpha\sin\alpha|\leqslant$$
$$\leqslant|\sin k\alpha\cos\alpha|+|\cos k\alpha\sin\alpha|\leqslant|\sin k\alpha|+|\sin\alpha|.$$

А так как, по предположению индукции, $|\sin k\alpha| \leqslant k \sin\alpha$, то $|\sin(k+1)\alpha| \leqslant |\sin k\alpha| + |\sin\alpha| \leqslant k\sin\alpha + |\sin\alpha| = (k+1) \times \times \sin\alpha$. 19. а) ▲ Так как $\operatorname{tg}\alpha > \alpha$ при $\alpha \in]0; \pi/2[$ и $\frac{1+a}{1-a} > \frac{1+b}{1-b}$ при $0 < b < a < 1$, то имеем

$$\operatorname{tg}(-314^\circ) = \operatorname{tg} 46^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 1^\circ) =$$

$$= \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{180}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{180}} > \frac{1+\frac{\pi}{180}}{1-\frac{\pi}{180}} > \frac{1+\frac{3}{180}}{1-\frac{3}{180}} = \frac{61}{59}.$$

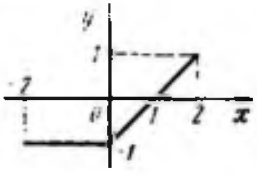
б) ▲ Пусть $ABCD$ — криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = 1/x$, $x = 5$, $x = 7$ и $y = 0$ (см. рис.). Тогда $\ln\frac{7}{5} = \int\limits_5^7 \frac{dx}{x}$. Но



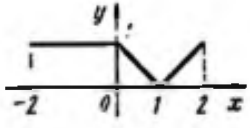
$S_{ABCD} < S_{ABB_1A_1} + S_{A_1C_1D_1D} = \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{11}{30}$ (здесь $|AB| = 1/5$, $|AA_1| = |A_1D| = 1$, $|C_1A_1| = 1/6$), т. е. $\ln\frac{7}{5} < \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$.

20. а) $D = D_1 \cap D_2$; б) если D_1 и D_2 совпадают. 21. $-7,4$ ● Подставьте в данное равенство $x = 2$ и $x = 1/2$, затем исключите из числовых равенств $f(1/2)$. 22. Прямая $y = x$ с исключенными точками $O(0; 0)$ и $A(1; 1)$.

23.

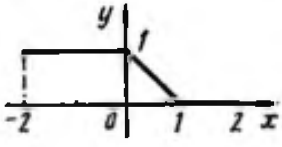


23. а)

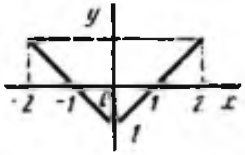


23. б)

23. в)



23. г)



23. д)

24. Нет. Например, функция $f(x) = x$ на интервале $]-1; 0[$ возрастает, а $\varphi(x) = x^2$ убывает на этом интервале. 25. ▲ Так как для любых $x_1, x_2 \in]a; b[$ и таких, что $x_2 > x_1$, $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) > f_2(x_2)$, то $f_1(x_1) + f_2(x_1) > f_1(x_2) + f_2(x_2)$ или $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$, а это означает, что функция $\varphi(x)$ является убывающей на этом

интервале. 26. ● Доказательство проведите методом математической индукции. 27. Да. Например, если $f_1(x)=x-\sqrt{x^2+1}$ и $f_2(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, то $\varphi(x)=-1$ — периодическая функция, периодом которой является любое число $T\in R$, кроме $T=0$. 28. ● Воспользуйтесь определениями четной и нечетной функций. 29. ● Используйте утверждения предыдущей задачи. 30. ▲ Пусть $f(x)$ — четная функция, определенная на некотором промежутке $]-a, a[$ и $x\in]-a; a[$. Тогда, по определению, и $-x\in]-a; a[$. Предположим, что $x>0$, тогда $-x<x$ и в силу строгой монотонности либо $f(-x)<f(x)$ (функция строго возрастает), либо $f(-x)>f(x)$ (функция строго убывает). С другой стороны, так как функция $f(x)$ — четная, то $f(-x)=f(x)$, что приводит к противоречию. 31. $f(x)=0$. ▲ По определению четной функции имеем $f(x)=f(-x)$, а по определению нечетной функции, $f(x)=-f(-x)$. Следовательно, $f(-x)=-f(-x)$, что возможно лишь при $f(-x)=0$, но тогда и $f(x)=f(-x)=0$, а это означает, что искомая функция принимает нулевые значения при всех $x\in R$. 32. а) — в) ● Доказательства этих теорем следуют непосредственно из определений четной и нечетной функций. 33. ▲ Так как, по условию, $f(x)$ — четная функция, то $y=f(x)=f(-x)$, т. е. одно и то же значение y функция приобретает по крайней мере в двух точках. Следовательно соответствие между $D(f)$ и $E(f)$ является необратимым. 34. ● Докажите, что из равенства $f(x)=f(x+T)$ следует необратимость соответствий между $D(f)$ и $E(f)$.

§ 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1. 2/3. ▲ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{2x+1}=$

$=\dfrac{2}{3}$. 2. 3/2. ● Разложите числитель и знаменатель дроби на множители. 3. —7,2. 4. 3. ● Упростите выражение, стоящее в квадратных скобках. 5. 1, 2. ▲ Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, то положив $x=1/y$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{5x-1}\,\frac{2x^2+1}{x^2+2x-1}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\frac{3}{y}\,\frac{2}{y^2}+1}{\frac{5}{y}-1\,\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y}-1}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{3}{5-y}\,\frac{2+y^2}{1+2y-y^2}\right)=\frac{3}{5}\cdot 2=1{,}2.$$

6. 2/9. ● Сложите дроби и положите $x=1/y$. 7. —3. ● Разложите числитель и знаменатель дроби на множители. 8. 3/4. 9. 3.

▲ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x^3}-1)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}\,(x+\sqrt{x}+1)=3.$

10. $\frac{1}{16}$. ▲ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-(3x-2)}{(x^2-4)(x+\sqrt{3x-2})}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-1}{(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}=$

$=\frac{1}{(2+2)(2+2)}=\frac{1}{16}$. 11. $\frac{1}{2}$. ▲ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(5-x-4)(\sqrt{2-x}+1)}{(2-x-1)(\sqrt{5-x}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}=\frac{1}{2}$.

12. $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$. ● Умножьте числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}$. 13. $\frac{3}{2}$. ▲ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2}$.

14. 1,2. ▲ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\times$

$\times\frac{(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt[3]{(1+x)^2}+(1-x)\sqrt[3]{(1+x)^2}+(1-x)^2)}{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-x})}=$

$(\sqrt[3]{(1+x)^3}+(1-x)\sqrt[3]{(1+x)^2}+(1-x)^2)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt[3]{(1+x)^3}+(1-x)\sqrt[3]{(1+x)^3}+(1-x)^2)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})((1+x)^3-(1-x)^3)}=$

$=\frac{2(1+1)(1+1+1)}{(1+1)(2+3)}=\frac{6}{5}$.

15. a^2. ▲ Упростим выражение, стоящее в скобках. Полагая (для удобства преобразований) $\sqrt[4]{a}=b$, $\sqrt[4]{x}=y$, получаем

$$\left(\frac{b^2+y^2}{b-y}\right)^{-1}-\frac{2by}{y^3-by^2+b^2y-b^3}=\frac{b-y}{b^2+y^2}-\frac{2by}{(y-b)(b^2+y^2)}=\frac{1}{b-y}.$$

А так как $\sqrt{2^{\log_2 a}}=\sqrt[4]{a}=b$, то выражение в фигурных скобках примет вид $b-y-b=-y=-\sqrt[4]{x}$. Далее находим предел:

$$\lim_{x\to a}(-\sqrt[4]{x})^8=\lim_{x\to a}x^2=a^2.$$

16. 8. ▲ Положим $2^{+x/2}=y$, тогда имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x+2^{3-x}-6}{2^{\frac{x}{2}}-2^{1-x}}=\lim_{y\to 2}\frac{y^2+\frac{8}{y^2}-6}{1-\frac{2}{y^2}}=\lim_{y\to 2}\frac{y^4-6y^2+8}{y-2}=$$

$$=\lim_{y\to 2}\frac{(y-2)(y+2)(y^2-2)}{y-2}=\lim_{y\to 2}(y+2)(y^2-2)=4\cdot 2=8.$$

17. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. ▲ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\right)}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=$

$=\frac{\cos 0}{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 18. -24. ▲ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}x\left(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos^2 x\cos^2\frac{\pi}{3}}=$

$=4\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{-\operatorname{tg}x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2 x}\right)=4\cdot\sqrt{3}\cdot 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-24$. 19. $+\frac{2}{\sqrt{3}}$.

▲ $\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}=\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{4(0{,}25-\sin^2 x)}{4\cos x(\cos^2 x-0{,}75)}=$

$=\lim\limits_{x\to\pi/6}\left(+\frac{1}{\cos x}\right)=+\frac{2}{\sqrt{3}}$. 20. 0,4. ▲ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{5}\frac{\sin 2x}{2x}$.

Полагая $2x=y$, получаем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$. Перемножая пределы 2/5 и 1, получаем ответ. 21. 8/3. ● Преобразуйте выражение $\sin 8x\operatorname{ctg}3x$ к виду $\frac{8}{3}\frac{\sin 8x}{8x}\frac{3x}{\sin 3x}\cos 3x$, вычислите пределы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x$ и примените теорему о пределе произведения конечного числа функций, имеющих предел в данной точке. 22. $-1/2$. ● $\frac{x^2+3x-1}{x^2+2x}\operatorname{tg}x=\frac{x^2+3x-1}{(\cos x)(x+2)}\frac{\sin x}{x}$.

23. 5. ● Положите $x-1=y$ и воспользуйтесь тем, что $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=$ $=1$. 24. -1. 25. 25/6. 26. 0 при $n=1$; 4,9 при $n=2$. 27. $-\sin a$. ● Преобразуйте выражение $[\sin(a+2x)-\sin(a+x)]-\sin(a+x)+$ $+\sin a$ в произведение. 28. 1/4.

▲ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\operatorname{tg}x)-(1+\sin x)}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\sin x})}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x(1-\cos^2 x)}{x^3(1+\cos x)(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3}\times$

$\times\frac{1}{\cos x(1+\cos x)(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\sin x})}=\frac{1}{1(1+1)(1+1)}=\frac{1}{4}$.

29. 1/2. ▲ Представим данную функцию $f(x)$ в виде

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1+1-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}=\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x+x^2}+\frac{1-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}.$$

Вычислим теперь пределы:

$$\lim_{x\to 0} f_1(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x(x+1)\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(x+1)\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}=0,$$

$$\lim_{x\to 0} f_2(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[4]{1-2x}}{x(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2x)}{x(1+x)\left(1+\sqrt[4]{1-2x}\right)\left(1+\sqrt{1-2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(1+x)\left(1+\sqrt[4]{1-2x}\right)\left(1+\sqrt{1-2x}\right)}=\frac{2}{1\cdot(1+1)\cdot(1+1)}=\frac{1}{2}.$$

Далее находим $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)+\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

30. а) $\{-3;\ 3\}$; б) $\{0\}$; в) $\{0\}$; г) $\{0\}$; д) $\{\pi/2+\pi n,\ n\in Z\}$; е) $\{n,\ n\in Z\}$. 31. Нет. 32. 4.

§ 3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1. а) Можно; б) нельзя. 2. а) Нельзя, например $f(x)=x$ дифференцируема в точке $x_0=0$, а функция $f_2(x)=x$ — нет, тем не менее $\varphi(x)=x\cdot x$ дифференцируема в точке $x_0=0$; б) нельзя. ● Рассмотрите функции $f_1(x)=f_2(x)=x$. 3. ▲ Пусть $f(x)$ — четная дифференцируемая функция. Тогда $f'(x)=-f'(-x)$, т. е. если $f'(x)=\varphi(x)$, то $\varphi(x)=-\varphi(-x)$, что и требовалось доказать. 4. ● Решение этой задачи аналогично решению задачи 3. 5. ▲ Пусть $f(x)$ — периодическая дифференцируемая функция с периодом T. Тогда $f'(x)=f'(x\pm T)$, т. е. если $f'=\varphi(x)$, то $f'(x\pm T)=\varphi(x\pm T)$, а это означает, что $\varphi(x)$ — периодическая функция с периодом T. 6. ▲ Так как $f(0)=0$, то

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \text{ и } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0).$$

7. ▲ Представим отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\frac{g(x)-g(0)}{x-0}}$$

(это можно сделать, так как $f(0)=g(0)=0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}},$$

и поскольку пределы $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ существуют и равны соответственно $f'(0)$ и $g'(0)\neq 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}}=\frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

8. Нельзя. Например, функция $f(x)=2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\neq 0$ и $f(0)=2$ имеет максимум в точке $x=0$, но ее производная $f'(x)$ не сохраняет знака в любой достаточно малой окрестности точки $x=0$. 9. а) $a\in\,]0;\ 1[\cup]1;\ 4[$. ▲ Данная функция дифференцируема на всей числовой оси, поэтому ее критическими точками могут быть лишь те, в которых $f'(x)=0$. Найдем $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}(a-1)(a-2)\left(-\sin\frac{x}{2}\right)+(a-1).$$

Очевидно, что если $a=1$, то $f'(x)=0$ при любом $x\in R$, т. е. каждая точка $x\in R$ является критической. Рассмотрим уравнение $f'(x)=0$ или $(a-2)\sin\dfrac{x}{2}=2$, $a\neq 1$. Это уравнение не будет иметь решений, если $|2/(a-2)|>1$ и $a\neq 1$, т. е. если $a\in\,]0;\ 1[\cup]1;\ 4[$, а это означает, что при этих значениях a $f'(x)\neq 0$ и функция критических точек не имеет; б) $a\in\,[2;\ 4[\cup]4;\ \infty[$. ● Покажите, что заданная функция не будет иметь критических точек при тех значениях a, при которых уравнение $1/\cos^2 x=(a-3)/(a-2)$, $a\neq 4$, не имеет решений; в) $a\in\,]-\infty;\ -4/3[\cup[2;\ \infty[$. 10. $\{-6\pi;\ -9\pi/2;\ 0\}$. 11. $\{\cos 1\cos 3;\ \sin 1\sin 3\}$, возрастает. ▲ Прежде всего заметим, что параметр a должен удовлетворять неравенству $\ln(2a-a^2)\geqslant 0$. Но

$$\ln(2a-a^2)\geqslant 0\Leftrightarrow 2a-a^2\geqslant 1\Leftrightarrow a=1.$$

Таким образом, $a=1$; тогда

$$f(x)=4x^3-6x^2\cos 2+3x\sin 2\sin 6,$$

$$f'(x)=12x^2-12x\cos 2+3\sin 2\sin 6,$$

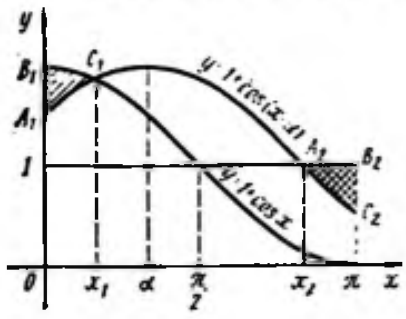
Решая квадратное уравнение $4x^2-4x\cos 2+\sin 2\sin 6=0$, находим критические точки: $x_1=\cos 1\cos 3$, $x_2=\sin 1\sin 3$. Для того чтобы выяснить, убывает или возрастает функция f при $x=0{,}5$, нужно определить знак числа $f'(0{,}5)$. Имеем $f'(0{,}5)=3(1+\sin 2\cdot\sin 6)-6\cos 2>0$, так как выражение, стоящее в круглых скобках, положительно, а $\cos 2<0$. 12. Убывает.

13. $[-4; (3-\sqrt{21})/2] \cup]1; +\infty[$. 14. $[-7; -1[\cup [2; 3]$. 15. $2\frac{1}{1}$.

● Докажите, что данная функция имеет период 2π, и найдите ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[0; 2\pi]$. 16. $M(e^{-4/3}; -\sqrt{2}\,e^{-4/3})$. ● Найдите наименьшее значение функции $l^2(x) = x^2\left(1+\frac{9}{2}(\ln x+1)^2\right)$ на полуинтервале $[e^{-1,5}; +\infty[$ (l — длина отрезка касательной к заданной кривой, заключенного между точкой M и осью Oy). 17. $M_1(1; e^{-1})$; $M_2(-1; e^{-1})$. ● Найдите координаты точки M_1 ($x \geqslant 0$) и воспользуйтесь тем, что функция $y = e^{-x^2}$ — четная. 18. $1/\sqrt{5}$. ● Покажите, что уравнение $x^4+3x^2+2x=2x-1$ не имеет корней. Составьте уравнение касательной к данной кривой, параллельной прямой $y=2x-1$. 19. $]-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{2e}\right\}$. ● Покажите, что при $a>0$ кривые $y_1 = ax^2$ и $y_2 = \ln x$ могут иметь только одну общую точку, если они касаются (в этом случае в точке касания $y_1'(x) = y_2'(x)$), а при $a<0$ эти кривые обязательно пересекаются только в одной точке x_0 (рассмотрите поведение этих функций на промежутках $]0; x_0[$ и $]x_0; 1]$).

§ 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

1. Нет. Например, $f(x) = 1+\cos x$ — функция периодическая, а $F(x) = \int (1+\cos x)\,dx = x+\sin x+c$ — функция непериодическая. 2. а) ▲ По определению, $F'(x) = f(x)$. Но $f(x)$ — функция нечетная, следовательно, $F(x)$ — функция четная (см. задачу 3, § 3 гл. IX); б) ● Используйте утверждение пункта а); в) 0. ● Докажите, что функция $f(x) = x^6 (\arcsin x)^7$ является нечетной на отрезке $[-1; 1]$. 3. Первообразная $F(x)$ будет нечетной, если $F(0)=0$. 4. $f(x) \geqslant 0$, если $a<b$; $f(x) \leqslant 0$, если $a>b$ (для всех $x \in [a; b]$). 5. $\{\pi/3\}$. ▲ Пусть $S_{A_1B_1C_1}$ — площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1+\cos x$, $y = 1+\cos(x-\alpha)$, $x=0$, и $S_{A_2B_2C_2}$ — площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1$, $y = 1+\cos(x-\alpha)$ и $x=\pi$. Тогда



$$S_{A_1B_1C_1} = \int_0^{x_1} [(1+\cos x) - (1+\cos(x-\alpha))]\,dx$$

и

$$S_{A_2B_2C_2} = \int_{x_2}^{\pi} [1-(1+\cos(x-\alpha))]\,dx,$$

Найдем пределы интегрирования x_1 и x_2: из уравнения $1+\cos x = 1+\cos(x-\alpha)$ находим $x_1=\alpha/2$, а из уравнения $1=1+\cos(x-\alpha)\to x_2=\alpha+\pi/2$. Вычисляя теперь интегралы, найдем

$$S_{A_1B_1C_1}=2\sin(\alpha/2)-\sin\alpha \quad \text{и} \quad S_{A_2B_2C_2}=1-\sin\alpha.$$

Так как фигуры $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равновелики, то $2\sin(\alpha/2)-\sin\alpha=1-\sin\alpha$ или $\sin(\alpha/2)=1/2$. Решив уравнение $\sin(\alpha/2)=1/2$ и учитывая ограничение $0<\alpha<\pi/2$, получим ответ. 6. $[\log_2 3;\ \infty[$. 7. а) $\{e^{-1}\}$. ● $f'(x)=1+\ln^2 x+2\ln x$; б) $\left\{\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi n}{2}\pm\frac{\pi}{6}\ \middle|\ n\in N\right\}$. 8. $-2\sqrt{3}+3/2+1,\sqrt{2}$. ▲ Дифференцируя $F(x)$, получим $F'(x)=3\sin x+4\cos x$. На интервале $]5\pi/4;\ 4\pi/3[$ $F'(x)<0$, так как $\sin x$ и $\cos x$ принимают только отрицательные значения (x принадлежит третьей четверти), поэтому $F(x)$ принимает наименьшее значение в точке $x=4\pi/3$. Вычислив интеграл $\int\limits_{5\pi/4}^{4\pi/3}(3\sin t+4\cos t)\,dt$, получим ответ. 9. $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-1$. 10. $F(x)=3^x+x-4$; $\{1\}$. 11. ▲ Если $f_1(x)\equiv f_2(x)$ на некотором множестве D и f_1 и f_2 дифференцируемы во всех точках области D, то $f_1'(x)\equiv f_2'(x)$. Имеем $(\sin 2x)'=(2\sin x\cos x)'$, или $2\cos 2x=2(\cos^2 x-\sin^2 x)$, или $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$. 12. $]1;\ (1+\sqrt{5})/2[$. ● Найдите корни уравнения $f(x)=\varphi(x)$ на промежутках $]-\infty;\ -1[$, $[-1;\ 0[$ и $[0;\ \infty[$. 13. $-(\operatorname{tg}\varphi)/6$. ▲ Уравнение прямой, пересекающей данную параболу, имеет вид $y=(\operatorname{tg}\varphi)x+b$, где b — некоторая константа. Из условия, что прямая пересекает параболу в двух точках, следует совместность системы уравнений

$$y=1-3x^2,\quad y=x\operatorname{tg}\varphi+b.$$

Исключая y из этой системы, приходим к квадратному уравнению $x^2+\frac{1}{3}(\operatorname{tg}\varphi)x-\frac{1}{3}+\frac{b}{3}=0$, корни которого x_1 и x_2 — абсциссы точек пересечения прямой и параболы. Середина отрезка, соединяющего точки пересечения, находится по формуле $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$, а так как $x_1+x_2=-(\operatorname{tg}\varphi)/3$ (теорема Виета), то $x_0=-(\operatorname{tg}\varphi)/6$. 14. $\{2\pi n-\pi/2\mid n\in Z\}$. 15. $a\in[9\pi/8;\ 11\pi/8]$. 16. $[7\pi/6;\ 5\pi/4[$. 17. $\{2\pi n+\pi/4;\ (2n+1)\pi-\operatorname{arctg}2\mid n\in Z\}$. ▲ Пусть $(\sin\alpha)x^2+(2\cos\alpha)x+\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2}=(kx+b)^2$ при любом $x\in R$. Тогда одновременно должны выполняться равенства

$$\begin{cases} k^2=\sin\alpha, & \sin\alpha>0,\\ 2kb=2\cos\alpha,\\ b^2=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2}>0. \end{cases}$$

Перемножим почленно первое и третье равенства и возведем в квадрат второе:

$$k^2b^2=\sin\alpha\,\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2},\quad k^2b^2=\cos^2\alpha,$$

Исключим k^2b^2 из этих соотношений, тогда $\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0$ или (поскольку последнее уравнение является однородным) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha-2=0$. Теперь имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha_1=1,\quad \operatorname{tg}\alpha_2=-2;$$

$$\alpha_1=\pi m+\frac{\pi}{4},\quad \alpha_2=\pi m-\operatorname{arctg}2,\quad m\in Z.$$

Для того чтобы выполнялись неравенства $\sin\alpha>0$ и $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2}>0$, в первой серии решений надо взять $m=2n$, во второй — $m=2n+1$. Окончательно получаем, что при $\alpha=2\pi n+\pi/4$ или $\alpha=(2n+1)\pi-\operatorname{arctg}2$ данная квадратичная функция является квадратом линейной функции. 18. $]-\infty;\ -14[\cup\{4\}\cup[14/3;\ \infty[$. ● Так как исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} bx+2b=12-4x-x^2, & (1)\\ 12-4x-x^2=-(x+6)(x-2)>0, & (2)\end{cases}$$

данное уравнение может иметь единственное решение, если 1) корни уравнения (1) x_1 и x_2 равны между собой и удовлетворяют неравенству (2); 2) при условии, что корни уравнения (1) различны ($x_2>x_1$) и совместна хотя бы одна из систем

$$\begin{cases} x_1<-6;\\ -6<x_2<2\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases} x_2>2,\\ -6<x_1<2;\end{cases}$$

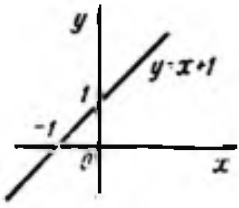
3) при $x_1=-6$ и $-6<x_2<+2$ или $x_2=2$ и $-6<x_1<2$. 19. $[5/2;\ \infty[$. ▲ Решением неравенства

$$\frac{\log_3(x^2-3x+7)}{\log_3(3x+2)}<1$$

является объединение интервалов $x\in]-2/3;\ -1/3[\cup]1;\ 5[$. Чтобы всякое решение неравенства было решением неравенства $x^2+(5-2a)x\leqslant 10a$, нули x_1 и x_2 функции $f(x)=x^2+(5-2a)x-10a$ должны удовлетворять неравенствам $x_1\leqslant -2/3$ и $x_2\geqslant 5$, т. е. одновременно должны выполняться неравенства $f(-2/3)\leqslant 0$ и $f(5)\leqslant 0$. Ответ получим, решив систему неравенств

$$(-2/3)^2+(5-2a)(-2/3)-10a\leqslant 0,\quad 5^2+(5-2a)5-10a\leqslant 0.$$

20. Вообще говоря, нет. ● Рассмотрите пример: $1/x>x$ для всех $x\in]0;\ 1[$, но неравенство $(1/x)'>x'$ на этом интервале не выполняется. 21. а) $\{(\operatorname{tg}a;\ 2;\ \ln(2a-1))\}$ при $a\in]1/2;\ \pi/2[$, $\varnothing$ при $a\notin]1/2;\ \pi/2[$; б) $\{(1;\ e^a;\ \pi n+(-1)^n\arcsin(a+1))\mid n\in Z\}$; $(1;\ -e^a;\ \pi n+(-1)^n\arcsin(a+1))\mid n\in Z\}$ при $a\in[-2;\ 0]$, $\varnothing$ при $a\notin[-2;\ 0]$. 22. Решение приведено на рис. ● Представьте левую часть уравнения в виде $(x+ay+b)(x^2+cxy+dy^2)$ и, определив коэффициенты a, b, c, d, приведите к виду $(x-y+1)(x^2+4xy+5y^2)=0$. 23. $A=7$, $B=-6$, $C=3$. ▲ Найдем зависимость между коэффициентами A, B, C. Из условия имеем: $f'(x)=2Ax+B$, $f'(1)=2A+B=8$, $f(2)+f''(2)=A\cdot 2^2+$

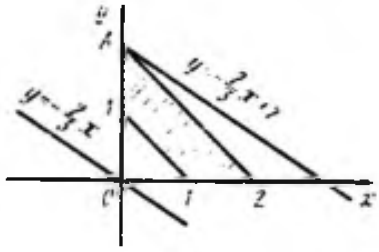


$+B\cdot 2+C+2A=33$, $\int_0^1 (Ax^2+Bx+C)\,dx=\frac{A}{3}+\frac{B}{2}+C=\frac{7}{3}$.

Ответ получим, решив далее систему линейных уравнений

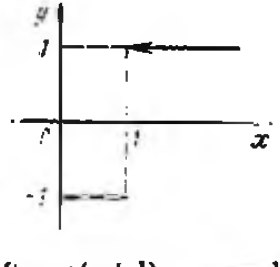
$$\begin{cases} 2A+B=8, \\ 6A+2B+C=33, \\ A/3+B/2+C=7/3. \end{cases}$$

24. $K=3$; $L=1$; $M=5$. 25. $P=5$; $Q=-6$; $R=3$; 26. (0; 2). ▲ Найдем в системе координат xOy множество точек, удовлетворяющих всем неравенствам системы (на рис. заштрихованная фигура). Положим в уравнении $z=2x+3y$ $z=0$ и построим прямую $y=-2x/3$. При любом значении c прямая $2x+3y=c$ параллельна прямой $2x+3y=0$ и с возрастанием c она будет перемещаться вверх. Самым большим значением c, при котором эта прямая будет иметь общие точки с областью решений данной системы, является то значение, при котором эта прямая пройдет через точку A, имеющую координаты $x=0$; $y=2$ (при $c=6$). 27. $-73/8$. При $x=-9/4$ $y=5/4$.



$$\blacktriangle\ 2x+x^2+2xy+3y^2-3y-5=(x^2+2x(y+1)+(y+1)^2)-$$
$$-(y+1)^2+3y^2-3y-5=(x+y+1)^2+2\left(y^2-2\frac{5}{4}y+\frac{25}{16}\right)-$$
$$-\frac{25}{8}-6=(x+y+1)^2+2\left(y-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{73}{8}.$$

Отсюда следует, что наименьшее значение равно $-73/8$ и достигается при $x+y+1=0$, $y-5/4=0$, т. е. $x=-9/4$, $y=5,4$. 28. Решение приведено на рис. ● Вычислите соответствующие пределы при $0<x<1$, $x=1$ и $x>1$. 29. 4950π. ● Докажите, что корни уравнения образуют арифметическую прогрессию и что на отрезке [0; 314] уравнение имеет 100 корней. 30. $S_1(x)=\frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1}$ при $x\neq\pm 1$, $S_1=n+1$ при $x=1$; $S_2(x)=\frac{2x(nx^{2n+2}-(n+1)x^{2n}+1)}{(x^2-1)^2}$ при $x\neq 1$, $S_2=n(n+1)$ при $x=1$; $S_2=-n(n+1)$ при $x=-1$. ● Для нахождения суммы $S_1(x)$ используйте формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии, а для нахождения $S_2(x)$ воспользуйтесь равенством $S_1'(x)=S_2(x)$. 31. 26. ▲ Найдем координаты векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Так как $y_1=x_1^2-2x_1+3$, то $y_1=2$ и вектор $\overrightarrow{OA}=(1-0;\ 2-0)$



$= (1; 2)$. Определим абсциссу точки B:

$$x_2^2 - 2x_2 + 3 = y_2 = 11, \quad x_2^2 - 2x_2 - 8 = 0; \quad x_2 = 4 \text{ или } x_2 = -2.$$

А поскольку точка B лежит в первой четверти, то она имеет координаты $x = 4$, $y = 11$, поэтому $\overrightarrow{OB} = (4; 11)$. Далее находим $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 11 = 26$. 32. 3. 33. $]-4/3; 0[$. ▲ Так как $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \, |\vec{q}| \cos(\widehat{\vec{p}\vec{q}})$ и $|\vec{p}| > 0$, $|\vec{q}| > 0$, то угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ будет тупым, если $\cos(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) < 0$ или $\vec{p} \cdot \vec{q} < 0$. Имеем $\vec{p} \cdot \vec{q} = c \log_2^2 x + 6c \log_2 x - 12$. Полагая $\log_2 x = t$, приходим к задаче: при каких значениях c неравенство $ct^2 + 6ct - 12 < 0$ выполняется при любом $t \in R$? Очевидно, что при $c = 0$ неравенство $-12 < 0$ верно при любом $t \in R$. Если $c \neq 0$, то, чтобы эти условия выполнялись, должны одновременно выполняться неравенства

$$\begin{cases} c < 0, \\ (6c)^2 + 48c < 0. \end{cases}$$

Решая эту систему неравенств, получаем $c \in]-4/3; 0[$; присоединив к этим значениям $c = 0$, получим ответ. 34. $\{\pi(4n+1) - \operatorname{arctg} 2; \pi(4n+2) - \operatorname{arctg} 2, n \in Z\}$. ▲ Из условия задачи имеем систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 6 = 0, \\ \sin 2\alpha < 0, \\ \sin(\alpha/2) > 0. \end{cases}$$

Решая уравнение системы относительно $\operatorname{tg} \alpha$, получаем $\operatorname{tg} \alpha = 3$ и $\operatorname{tg} \alpha = -2$. При $\operatorname{tg} \alpha = 3$ неравенство $\sin 2\alpha < 0$ не выполняется. Поэтому $\alpha = \pi k - \operatorname{arctg} 2$. Найдем целые значения k, при которых выполняется неравенство $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$. Введем обозначение $\operatorname{arctg} 2 = 2\beta$:

$$\sin\left(\frac{\pi k}{2} - \beta\right) = \sin \frac{\pi k}{2} \cos\beta - \cos \frac{\pi k}{2} \sin\beta > 0.$$

Пусть $k = 2l$, $l \in Z$, тогда $\cos \pi l \sin\beta = (-1)^{l+1} \sin\beta > 0$, если $l = 2n+1$, $n \in Z$. Если $k = 2l+1$, $l \in Z$, то $\sin\left(\pi l + \frac{\pi}{2}\right) \cos\beta = (-1)^l \cos\beta > 0$ при $l = 2n$, $n \in Z$. Таким образом, неравенство $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ выполняется, если $\alpha = \pi(2(2n+1)) - \operatorname{arctg} 2$ или $\alpha = (2 \cdot 2n + 1)\pi - \operatorname{arctg} 2$. 35. $x - 2y + 11 = 0$, $2x + y - 8 = 0$. ▲ Пусть $K(x_0, y_0)$ — точка окружности, через которую проходит касательная к окружности $(x+1)^2 + y^2 = 20$ с центром в точке $O(-1; 0)$. Векторы $\overrightarrow{AK} = (x_0 - 1, y_0 - 6)$ и $\overrightarrow{OK} = (x_0 + 1, y_0)$ взаимно перпендикулярны, поэтому $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{OK} = 0$ или

$(x_0 - 1)(x_0 + 1) + (y_0 - 6)\, y_0 = 0$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0 - 6y_0 - 1 = 0, \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 19 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $x_0 = 9 - 3y_0$. Подставляя это значение x_0 в первое уравнение, будем иметь уравнение $y_0^2 - 6y_0 + 8 = 0$, корни которого $y_{01} = 4$, $y_{02} = 2$. Таким образом, точки на окружности, через которые проходят касательные, имеют координаты $K_1(-3; 4)$ и $K_2(3; 2)$. Ответ получим используя формулу $\frac{x - x_A}{x_K - x_A} = \frac{y - y_A}{y_K - y_A}$.

Петр Тимофеевич Дыбов, Авенир Иванович Забоев,
Александр Семенович Иванов, Дмитрий Федорович Калиниченко,
Николай Владимирович Шолохов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

Заведующая редакцией Е. С. Гридасова
Редактор А. И. Селиверстова
Младшие редакторы: С. А. Доровских, Н. П. Майкова
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор Р. С. Родичева
Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 3683

Изд. № ФМ-732. Сдано в набор 17.03.82. Подп. в печать 06.07.82. Формат 84×108¹/₃₂. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 12,60 усл. печ. л. Усл. кр.-отт. 12,81. 13,20 уч.-изд. л. Тираж 300 000 экз. Зак. № 359. Цена 45 коп.
Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский просп., 15.